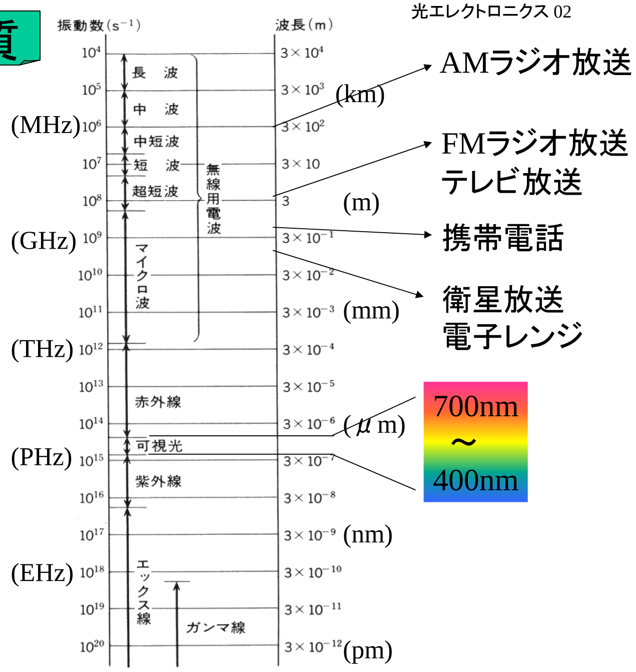
光の性質

光は電磁波



マクスウェルの方程式:積分形

電場のガウスの法則

$$\int_S \mathbf{E}(\mathbf{r},t)\cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho(\mathbf{r},t)dV = \frac{1}{\varepsilon_0}Q$$

磁場のガウスの法則(磁荷無し)

$$\int_S \mathbf{B}(\mathbf{r},t)\cdot d\mathbf{S} = 0$$

ファラデーの電磁誘導の法則

$$\oint_C \mathbf{E}(\mathbf{r},t)\cdot d\mathbf{s} = -\frac{\partial}{\partial t}\int_S \mathbf{B}(\mathbf{r},t)\cdot d\mathbf{S} = -\frac{\partial\Phi(t)}{\partial t}$$

マクスウェル・アンペールの法則

$$\oint_C \mathbf{B}(\mathbf{r},t)\cdot d\mathbf{s} = \mu_0\int_S \left[\mathbf{i}(\mathbf{r},t) + \varepsilon_0\frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r},t)}{\partial t}\right]\cdot d\mathbf{S}$$

マクスウェルの方程式:微分形

$$\nabla\cdot\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \frac{\rho(\mathbf{r},t)}{\varepsilon_0}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{B}(\mathbf{r},t) = 0$$

$$\nabla\times\mathbf{E}(\mathbf{r},t) + \frac{\partial\mathbf{B}(\mathbf{r},t)}{\partial t} = 0$$

$$\nabla\times\mathbf{B}(\mathbf{r},t) - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\mathbf{E}(\mathbf{r},t)}{\partial t} = \mu_0\mathbf{i}(\mathbf{r},t)$$

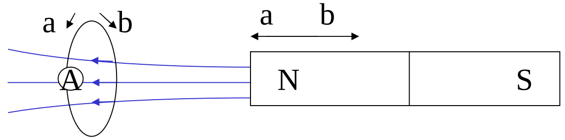
マクスウェルの方程式
(Maxwell's equation)

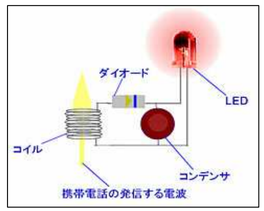
ただし

$$\mathbf{D}(\mathbf{r},t) = \varepsilon_0\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$$ 電束密度(D), 電場の強さ(E)

$$\mathbf{H}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{\mu_0}\mathbf{B}(\mathbf{r},t)$$ 磁場の強さ(H), 磁束密度(B)

－ファラデーの法則：電磁誘導－





$$\oint_C \mathbf{E}(\mathbf{r},t)\cdot d\mathbf{s} = -\frac{\partial}{\partial t}\int_S \mathbf{B}(\mathbf{r},t)\cdot d\mathbf{S} = -\frac{\partial\Phi(t)}{\partial t}$$

↕ ファラデーの電磁誘導の法則

$$\nabla\times\mathbf{E}(\mathbf{r},t) + \frac{\partial\mathbf{B}(\mathbf{r},t)}{\partial t} = 0$$

時間変動する磁場が電場を作る

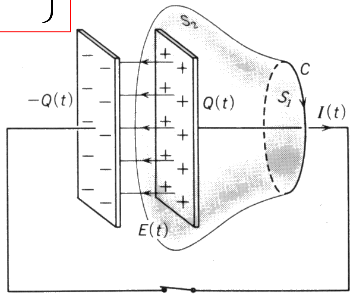
−アンペールの法則と変位電流−

$$\oint_C \mathbf{B}(\mathbf{r},t)\cdot d\mathbf{s} = \mu_0 \int_S \left[\mathrm{i}(\mathbf{r},t) + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r},t)}{\partial t} \right] \cdot d\mathbf{S}$$

↕ マクスウェル・アンペールの法則

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r},t) = \mu_0 \left\{ \mathbf{i}(\mathbf{r},t) + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r},t)}{\partial t} \right\}$$

時間変動する電場が磁場を作る



ρ =0, **i**=0の真空中でのマクスウェルの方程式を解く

・電磁誘導の式

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r},t) + \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r},t)}{\partial t} = 0$$

$\nabla \times \rightarrow$

$$\nabla \times \{\nabla \times \mathbf{E}\} + \nabla \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$$

$$-\nabla^2 \mathbf{E} + \nabla\{\nabla \cdot \mathbf{E}\} + \nabla \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$$

$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$: $\rho = 0$ (電荷無し)

・マクスウェル・アンペールの式

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r},t) - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r},t)}{\partial t} = 0$$

$\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{B}) - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0$$

電磁場の波動方程式

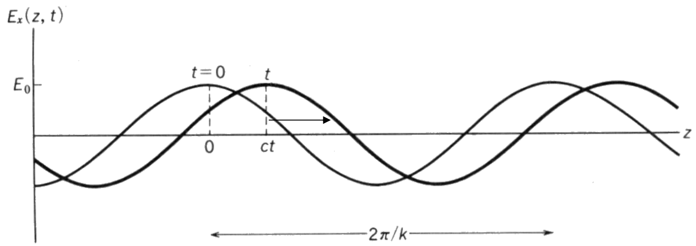
$$\nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{r},t) - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}(\mathbf{r},t)}{\partial t^2} = 0$$

$$\nabla^2 \mathbf{B}(\mathbf{r},t) - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}(\mathbf{r},t)}{\partial t^2} = 0$$

たとえば、
z方向に進む単色平面波の解

$$\mathbf{E}(z,t) = \mathbf{E}_0 \cos(\omega t - kz)$$

$$\mathbf{B}(z,t) = \mathbf{B}_0 \cos(\omega t - kz)$$



位相速度 : $v = \dfrac{\omega}{k}$, 　波長 : $\lambda = \dfrac{2\pi}{k}$

平面波

一般の平面波

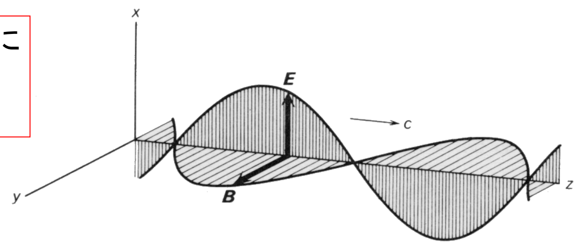
$$\left.\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r},t) &= \mathbf{E}_0 \cos(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r}) \\ \mathbf{B}(\mathbf{r},t) &= \mathbf{B}_0 \cos(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r}) \end{aligned}\right\}$$ 波数ベクトル**k**方向に進む平面波

マクスウェルの式に代入、

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r},t) = -\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r},t)}{\partial t} \longrightarrow \mathbf{k} \times \mathbf{E}_0 = \omega \mathbf{B}_0$$

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r},t) = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r},t)}{\partial t} \longrightarrow \mathbf{k} \times \mathbf{B}_0 = -\omega \varepsilon_0 \mu_0 \mathbf{E}_0$$

$\mathbf{E}_0$, $\mathbf{B}_0$ は進行方向**k**に
対して垂直で、
かつ互いに垂直。



波動方程式

$$\nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{r},t) - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}(\mathbf{r},t)}{\partial t^2} = 0$$

に平面波の解を代入

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \mathbf{E}_0 \cos(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})$$

$$\downarrow$$

$$\mathbf{k}^2 = \varepsilon_0 \mu_0 \omega^2 \longrightarrow k = \omega\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} \longrightarrow \boxed{v = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}}$$

真空中の光速 $\boxed{c = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = 2.9979\times 10^8 \text{ m/s}}$

マクスウェルの方程式を解くことにより、変動する電磁場が
真空中を波として伝わる。 $\longrightarrow$ $\boxed{\text{電磁波}}$

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r},t) - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r},t)}{\partial t} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r},t) + \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r},t)}{\partial t} = 0$$

変動する磁場が「電磁誘導」によって電場を作り出す。

変動する電場が「変位電流」として磁場を作り出す。

電磁場のエネルギーとポインティングベクトル

$$\boxed{\begin{aligned} u &= \frac{1}{2}\mathbf{E}\cdot\mathbf{D} + \frac{1}{2}\mathbf{H}\cdot\mathbf{B} \\ &= \frac{1}{2}\varepsilon_0 \mathbf{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0}\mathbf{B}^2 \end{aligned}}$$

単位体積あたりのエネルギー密度

$\boxed{\mathbf{S} = \mathbf{E}\times\mathbf{H}}$ ポインティングベクトル → エネルギー密度の流れ

平面波 $\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \mathbf{E}_0 \cos(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})$

$\mathbf{B}(\mathbf{r},t) = \mathbf{B}_0 \cos(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})$ の場合･･･

一周期の平均値 $\overline{u} = \dfrac{1}{2}\varepsilon_0 |\mathbf{E}|^2$

$$|\overline{\mathbf{S}}| = c\overline{u}$$

電磁場の複素表示

$$\cos(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r}) \longrightarrow \exp[i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})]$$
$$= \cos(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r}) + i\sin(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cos(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r} + \varphi)$$

$$\downarrow$$

$$\tilde{\mathbf{E}} = \mathbf{E}_0 \exp[i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r}) + i\varphi] = \underbrace{\mathbf{E}_0 e^{i\varphi}}_{\text{複素振幅}} e^{i\omega t} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$$

偏光

$$\tilde{\mathbf{E}}_1 = A\mathbf{e}_x \exp[i(\omega t - kz)]$$

電場の振動がx方向のみ ⟶ 「x方向に直線偏光している。」

$$\tilde{\mathbf{E}}_2 = B\mathbf{e}_y \exp[i(\omega t - kz)]$$

y偏光の光

E_1とE_2を位相差ϕをずらして重ね合わせると・・・・

$$\tilde{\mathbf{E}} = \tilde{\mathbf{E}}_1 + e^{i\varphi}\tilde{\mathbf{E}}_2$$

$$= (A\mathbf{e}_x + Be^{i\varphi}\mathbf{e}_y)\exp[i(\omega t - kz)]$$

$$\mathrm{Re}[\tilde{\mathbf{E}}] = \mathbf{e}_x \underbrace{A\cos(\omega t - kz)}_{E_x} + \mathbf{e}_y \underbrace{B\cos(\omega t - kz + \varphi)}_{E_y}$$

$$\left(\frac{E_x}{A}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{B}\right)^2 - 2\left(\frac{E_x}{A}\right)\left(\frac{E_y}{B}\right)\cos\varphi = \sin^2\varphi$$

楕円偏光

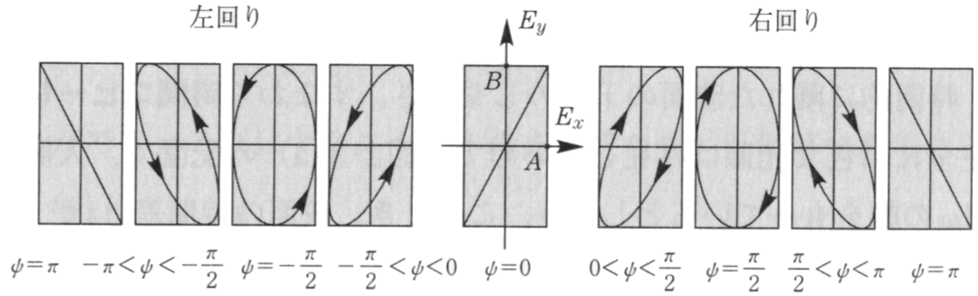


図２・２　直線偏光の重ね合せで作られる楕円偏光と直線偏光

偏光

レポート (提出は任意)

1. マクスウェルの方程式から波動方程式を導出せよ。
   (難しければ、電場E_xがzとtにのみ依存するとして計算せよ)

2. 平面波$\mathbf{E}(\mathbf{r},t)=E_0\cos(\omega t-\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})$が波動方程式の解であることを示せ。
   (難しければ、$\mathbf{E}(z,t)=E_0\cos(\omega t-kz)$ で。)

3. 身の回りで、偏光を利用した物をあげよ。