光量子エレクトロニクス特論

1. 電磁気学の復習
2. 量子力学の復習
3. 状態ベクトルとシュレディンガー方程式
4. 時間依存のシュレディンガー方程式
5. 密度行列法
6. 電子と光の相互作用-古典振動子モデル
7. 電子2準位系とブロッホ方程式
8. 電子2準位系におけるコヒーレント光非線形効果
9. 2原子分子のエネルギー準位
10. 固体のエネルギー準位
11. 光学遷移と次元性
12. 光学遷移におけるクーロン相互作用の効果
13. フラーレンの電子状態と光学遷移
14. ナノチューブの電子状態と光学遷移
15.まとめ

時間依存のあるシュレディンガー方程式

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)>=\hat{H}|\psi(t)>$$

基底:$|\mathbf{r}>$

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}<\mathbf{r}|\psi(t)>=<\mathbf{r}|\int d^3r'\hat{H}|\mathbf{r}'><\mathbf{r}'|\psi(t)>$$

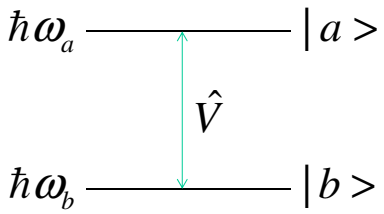
$$=\int d^3r'<\mathbf{r}|\hat{H}|\mathbf{r}'><\mathbf{r}'|\psi(t)>$$

$$<\mathbf{r}|\hat{H}|\mathbf{r}'>=H(\mathbf{r},\nabla^2)\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}'),\quad <\mathbf{r}'|\psi(t)>=\psi(\mathbf{r}',t)$$

$$\rightarrow\quad i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\mathbf{r},t)>=\hat{H}\psi(\mathbf{r},t)$$

2準位系

$$|\psi(t)>=C_a\exp(-i\omega_a t)|a>+C_b\exp(-i\omega_b t)|b>$$



$$|a>\ \leftrightarrow\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\quad |b>\ \leftrightarrow\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

$$|\psi(t)>\ \leftrightarrow C_a(t)\exp(-i\omega_a t)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+C_b(t)\exp(-i\omega_b t)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}C_a(t)\exp(-i\omega_a t)\\C_b(t)\exp(-i\omega_b t)\end{pmatrix}$$

2準位系

$$\hat{H}=\hbar\omega_a|a><a|+V_{ab}|a><b|+V_{ba}|b><a|+\hbar\omega_b|b><b|$$

$$=\begin{pmatrix}H_{aa}&H_{ab}\\H_{ba}&H_{bb}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\hbar\omega_a&V_{ab}\\V_{ba}&\hbar\omega_b\end{pmatrix}$$

示せ！

シュレディンガー方程式

$$i\hbar\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}C_a\exp(-i\omega_a t)\\C_b\exp(-i\omega_b t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\hbar\omega_a&V_{ab}\\V_{ba}&\hbar\omega_b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}C_a\exp(-i\omega_a t)\\C_b\exp(-i\omega_b t)\end{pmatrix}$$

期待値

$$<O>=C_aC_a^*O_{aa}+C_bC_b^*O_{bb}$$

$$+\{C_aC_b^*\exp[-i(\omega_a-\omega_b)t]O_{ba}+c.c.\}$$

示せ！

2準位系

$$\hat{V} = -\boldsymbol{\mu}\cdot\mathbf{E} = -e\mathbf{r}\cdot\mathbf{E}$$

$$e\mathbf{r} = e\begin{pmatrix} 0 & \mathbf{r}_{ab} \\ \mathbf{r}_{ba} & 0 \end{pmatrix}$$

示せ！

期待値

$$< e\mathbf{r} >=< \psi | e\mathbf{r} | \psi >$$

$$= eC_a C_b^{*} \exp[-i(\omega_a - \omega_b)t]\mathbf{r}_{ba} + c.c.$$

シュレディンガー表示、ハイゼンベルグ、表示相互作用表示

ハミルトニアン:

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}$$

無摂動: $\hat{H}_0$　　相互作用: $\hat{V}$

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)>=\hat{H}|\psi(t)>$$

$$\rightarrow \frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)>=-\frac{i}{\hbar}\hat{H}|\psi(t)>$$

形式的に積分すると

$$|\psi(t)>=\exp\left(-\frac{i\hat{H}t}{\hbar}\right)|\psi(0)>$$

物理量（演算子）: $\hat{O}$

状態ベクトル: $|\psi(t)>=\exp\left(-\frac{i\hat{H}t}{\hbar}\right)|\psi(0)>$

期待値の時間依存性:

$$< \hat{O} >=< \hat{O} > (t) =< \psi(t) | \hat{O}(0) | \psi(t) >$$

物理量（演算子）: $\hat{O}(0)$ には時間依存性がない

$$\rightarrow \hat{O}(0),\ |\psi(t)>$$ シュレディンガー表示

時間依存性は状態ベクトル（波動関数）にある！

ハイゼンベルグ表示

$$< \hat{O} >=< \psi(t) | \hat{O}(0) | \psi(t) >$$

$$=< \psi(0) | \exp\left(\frac{i\hat{H}t}{\hbar}\right)\hat{O}(0)\exp\left(-\frac{i\hat{H}t}{\hbar}\right)|\psi(0)>$$

$$=< \psi(0) | \hat{O}(t) | \psi(0) >$$

$$\rightarrow \hat{O}(t) = \exp\left(\frac{i\hat{H}t}{\hbar}\right)\hat{O}(0)\exp\left(-\frac{i\hat{H}t}{\hbar}\right),\ |\psi(0)>$$

状態ベクトルは時間変化しない！
時間依存性は物理量（演算子）にある！

ハイゼンベルグ表示

$$\hat{O}(t) = \exp\left(\frac{i\hat{H}t}{\hbar}\right)\hat{O}(0)\exp\left(-\frac{i\hat{H}t}{\hbar}\right)$$

↓

$$\frac{d}{dt}\hat{O}(t) = \frac{i}{\hbar}\left[\hat{H}\hat{O} - \hat{O}\hat{H}\right] = \frac{i}{\hbar}\left[\hat{H}, \hat{O}\right]$$

示せ！

運動方程式

相互作用表示

$$<\hat{O}> = <\psi(t)|\hat{O}(0)|\psi(t)>$$

$$= <\psi(0)|\exp\left(\frac{i\hat{H}t}{\hbar}\right)\hat{O}(0)\exp\left(-\frac{i\hat{H}t}{\hbar}\right)|\psi(0)>$$

$$= <\psi(0)|\exp\left(\frac{i(\hat{H}_0+\hat{V})t}{\hbar}\right)\hat{O}(0)\exp\left(-\frac{i(\hat{H}_0+\hat{V})t}{\hbar}\right)|\psi(0)>$$

$$= <\psi(0)|\exp\left(\frac{i\hat{V}t}{\hbar}\right)\exp\left(\frac{i\hat{H}_0t}{\hbar}\right)\hat{O}(0)\exp\left(-\frac{i\hat{H}_0t}{\hbar}\right)\exp\left(\frac{i\hat{V}t}{\hbar}\right)|\psi(0)>$$

$$= <\psi^I(t)|\hat{O}^I(t)|\psi^I(t)>$$

相互作用表示

$$|\psi^I(t)> = \exp\left(-\frac{i\hat{V}t}{\hbar}\right)|\psi(0)>$$

$$\hat{O}^I(t) = \exp\left(\frac{i\hat{H}_0t}{\hbar}\right)\hat{O}(0)\exp\left(-\frac{i\hat{H}_0t}{\hbar}\right)$$

↓

$$\frac{d}{dt}|\psi^I(t)> = -\frac{i}{\hbar}\hat{V}|\psi^I(t)>$$

$$\frac{d}{dt}\hat{O}^I(t) = \frac{i}{\hbar}\left[\hat{H}_0\hat{O}^I - \hat{O}^I\hat{H}_0\right] = \frac{i}{\hbar}\left[\hat{H}_0, \hat{O}^I\right]$$

示せ！

相互作用表示

$$|\psi(t)> = \exp\left(-\frac{i\hat{H}t}{\hbar}\right)|\psi(0)> = \exp\left(-\frac{i\hat{H}_0t}{\hbar}\right)\exp\left(-\frac{i\hat{V}t}{\hbar}\right)|\psi(0)>$$

$$<n|\psi(t)> = \exp(-i\omega_n t)<n|\exp\left(-\frac{i\hat{V}t}{\hbar}\right)|\psi(0)>$$

$$|\psi(t)> = \sum_n C_n(t)\exp(-i\omega_n t)|n>$$

$$<n|\psi(t)> = C_n(t)\exp(-i\omega_n t)$$

$$\rightarrow C_n(t) = <n|\exp\left(-\frac{i\hat{V}t}{\hbar}\right)|\psi(0)>$$

相互作用表示

$$|\psi^I(t)>=\exp\left(-\frac{i\hat{V}t}{\hbar}\right)|\psi(0)>$$

$$<n|\psi^I(t)>=<n|\exp\left(-\frac{i\hat{V}t}{\hbar}\right)|\psi(0)>=C_n(t)$$

↓

$$|\psi^I(t)>=\sum_n|n><n|\psi^I(t)>=\sum_n C_n(t)|n>$$

$$|\psi(t)>=\sum_n|n><n|\psi(t)>=\sum_n c_n(t)|n>$$

$$\longrightarrow\ c_n=\exp\left(-i\omega_n t\right)C_n(t)$$

$$\frac{d}{dt}c_n=-i\omega_n c_n-\frac{i}{\hbar}\sum_k<n|\hat{V}|k>c_k$$

示せ！