光量子エレクトロニクス特論

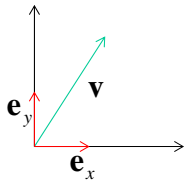
1. 電磁気学の復習
2. 量子力学の復習
3. 状態ベクトルとシュレディンガー方程式
4. 時間依存のシュレディンガー方程式
5. 密度行列法
6. 電子と光の相互作用-古典振動子モデル
7. 電子2準位系とブロッホ方程式
8. 電子2準位系におけるコヒーレント光非線形効果
9. 2原子分子のエネルギー準位
10. 固体のエネルギー準位
11. 光学遷移におけるクーロン相互作用の効果
12. 光学遷移と次元性
13. フラーレンの電子状態と光学遷移
14. ナノチューブの電子状態と光学遷移
15.まとめ

状態ベクトルとシュレディンガー方程式

2次元ベクトル: $\mathbf{v} = v_x \mathbf{e}_x + v_y \mathbf{e}_y$

成分: $v_x = \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{v}$

$\longrightarrow \quad \mathbf{v} = \mathbf{e}_x (\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{v}) + \mathbf{e}_y (\mathbf{e}_y \cdot \mathbf{v})$



$\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y$ 基底ベクトル

・規格 $\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_x = \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_y = 1$

・直交 $\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_y = 0$

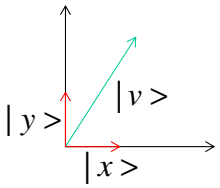
問題1

任意のベクトルが上式のように表わすことができる条件は？
→ 完全性

Diracの記法: $|v> = v_x |x> + v_y |y>$

成分: $v_x = <x|v>$

$\longrightarrow |v> = |x><x|v> + |y><y|v>$



・規格 $<x|x> = <y|y> = 1$ $\quad |x>, |y>$ 基底ケット

・直交 $<x|y> = 0$

・完全性 $|v> = |x><x|v> + |y><y|v>$

$= (|x><x| + |y><y|)|v>$

$\longrightarrow \quad |x><x| + |y><y| = 1$

N次元空間: $|v> = \sum_k v_k |k> = \sum_k |k><k|v>$

・規格直交条件

$<k|j> = \delta_{kj}$

・完全性

$I = \sum_k |k><k|$

n ブラ: $<n|$

n ケット: $|n>$

$<n| = |n>^{\dagger}$

$<k|v>^{*} = <v|k>$

演算子：O

ベクトル$|\psi>$をベクトル$|\phi>$に変換する

$$|\phi>=O|\psi>$$

逆演算子：O^{-1}

$$O^{-1}|\phi>=O^{-1}O|\psi>=|\psi>$$

$$O^{-1}O=OO^{-1}=I$$

$$O=\sum_n\sum_m O_{nm}|n><m|$$

$$O_{nm}=<n|O|m>$$ 成分表示

演算子：O

$$O=\sum_n\sum_m O_{nm}|n><m|$$

$$O_{nm}=<n|O|m>$$

問題2 上式を示せ

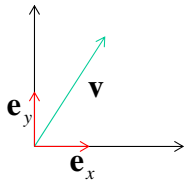
$$|\phi>=O|\psi>$$ $$I=\sum_k|k><k|$$ を使う

ベクトル表記と成分表記

ベクトル表記：$\mathbf{v}=v_x\mathbf{e}_x+v_y\mathbf{e}_y$

成分表記：(v_x,v_y)

$$v_x=\mathbf{e}_x\cdot\mathbf{v}$$



どのような表現になるかは基底ベクトルに依存する

$$|\psi>\ \leftrightarrow\ \begin{pmatrix}<1|\psi>\\<2|\psi>\\\vdots\\<n|\psi>\\\vdots\end{pmatrix}$$

どのような表現になるかは
基底ケットに依存する

演算子の成分表記

$$O=\sum_n\sum_m O_{nm}|n><m|$$

$$O_{nm}=<n|O|m>$$

$$O\ \leftrightarrow\ \begin{pmatrix}O_{11}&O_{12}&\cdots&O_{1m}&\cdots\\O_{21}&O_{22}&\cdots&O_{2m}&\cdots\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\\O_{n1}&O_{n2}&\cdots&O_{nm}&\cdots\\\vdots&\vdots&&\vdots&\ddots\end{pmatrix}$$

基底ベクトル

$$\mathbf{e}_x = (1,0), \quad \mathbf{e}_y = (0,1)$$

$$|1> \ \leftrightarrow \begin{pmatrix} <1|1> \\ <2|1> \\ \vdots \\ <n|1> \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad |2> \ \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}, \ \cdots$$

内積

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{w} = (v_x\mathbf{e}_x + v_y\mathbf{e}_y)\cdot(w_x\mathbf{e}_x + w_y\mathbf{e}_y)$$

$$= v_x w_x + v_y w_y = (v_x, v_y)\begin{pmatrix} w_x \\ w_y \end{pmatrix}$$

$$<\phi|\psi> = (<\phi|1> \ <\phi|2> \ \cdots \ <\phi|n> \ \cdots)\begin{pmatrix} <1|\psi> \\ <2|\psi> \\ \vdots \\ <n|\psi> \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$$= \sum_n <\phi|n><n|\psi>$$

物理量（観測量：Observable）：O

→エルミート行列

$$O^*_{ji} = O_{ij}$$

物理量 O の固有値 λ と固有状態 $|\phi>$

$$O|\phi> = \lambda|\phi>$$

問題3 エルミート行列の固有値が実数であることを示せ。
また、違う固有値を持つ固有状態は直交していることを示せ。

シュレディンガー方程式

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi> = H|\psi>$$

状態が $|\psi>$ で表わされる時の物理量 Oの期待値：$<O>$

$$<O> = <\psi|O|\psi>$$

エネルギーの期待値：$<E>$

$$<E> = <\psi|H|\psi>$$

波動関数 $\psi(x)$ と状態ベクトル $|\psi>$

位置演算子 x の固有状態: $|x>$

正規直交: $<x'|x>=\delta(x'-x)$

完全性: $\int dx\,|x><x|=I$

状態ベクトル $|\psi>$ を $|x>$ で展開

$$|\psi>=\int dx\,|x><x|\psi>$$

波動関数 $\psi(x)$ は展開係数

$$\psi(x)\equiv<x|\psi>$$

波動関数: $\psi(x,t)$

$$\psi(x,t)=<x|\psi(t)>=\sum_n <x|n><n|\psi(t)>$$

$$=\sum_n C_n \exp(-i\omega_n t)u_n(x)$$

$$u_n(x)\equiv<x|n>$$

$$<n|\psi(t)>=C_n\exp(-i\omega_n t)$$

3次元: $\psi(\mathbf{r},t)$

位置演算子 $\mathbf{r}$ の固有状態: $|\mathbf{r}>$

$$\psi(\mathbf{r},t)=<\mathbf{r}|\psi(t)>$$

時間依存のあるシュレディンガー方程式

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)>=\hat{H}\,|\psi(t)>$$

基底: $|\mathbf{r}>$

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}<\mathbf{r}|\psi(t)>=<\mathbf{r}|\int d^3r'\hat{H}\,|\mathbf{r}'><\mathbf{r}'|\psi(t)>$$

$$=\int d^3r'<\mathbf{r}|\hat{H}\,|\mathbf{r}'><\mathbf{r}'|\psi(t)>$$

$$<\mathbf{r}|\hat{H}\,|\mathbf{r}'>=H(\mathbf{r},\nabla^2)\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}'),\quad <\mathbf{r}'|\psi(t)>=\psi(\mathbf{r}',t)$$

$$\longrightarrow\quad i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\mathbf{r},t)>=\hat{H}\psi(\mathbf{r},t)$$