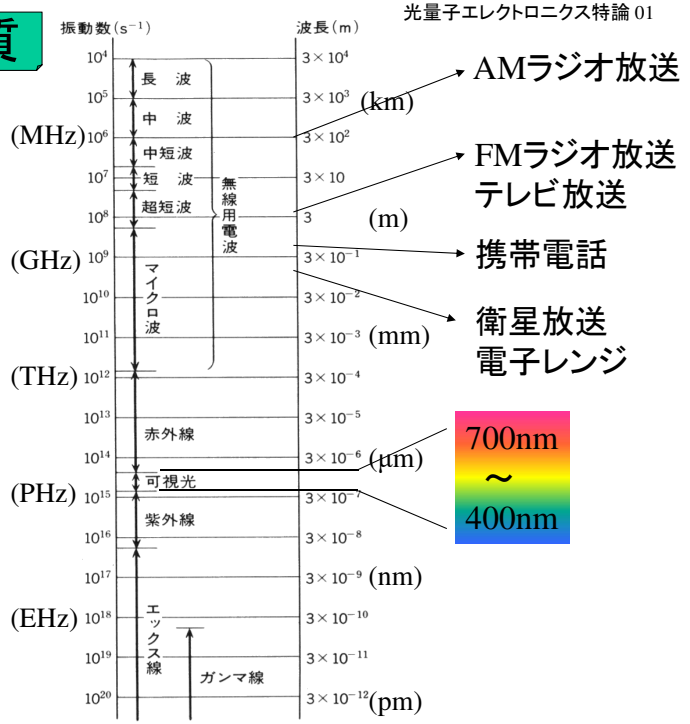
光量子エレクトロニクス特論

1. 電磁気学の復習
2. 量子力学の復習
3. 状態ベクトルとシュレディンガー方程式
4. 時間依存のシュレディンガー方程式
5. 密度行列法
6. 電子と光の相互作用-古典振動子モデル
7. 電子2準位系とブロッホ方程式
8. 電子2準位系におけるコヒーレント光非線形効果
9. 2原子分子のエネルギー準位
10. 固体のエネルギー準位
11. 光学遷移と次元性
12. 光学遷移におけるクーロン相互作用の効果
13. フラーレンの電子状態と光学遷移
14. ナノチューブの電子状態と光学遷移
15.まとめ

光の性質

光は電磁波



マクスウェルの方程式:微分形

$$\nabla\cdot\mathbf{E}(\mathbf{r},t)=\frac{\rho(\mathbf{r},t)}{\varepsilon_0}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{B}(\mathbf{r},t)=0$$

$$\nabla\times\mathbf{E}(\mathbf{r},t)+\frac{\partial\mathbf{B}(\mathbf{r},t)}{\partial t}=0$$

$$\nabla\times\mathbf{B}(\mathbf{r},t)-\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\mathbf{E}(\mathbf{r},t)}{\partial t}=\mu_0\mathbf{i}(\mathbf{r},t)$$

マクスウェルの方程式
(Maxwell's equation)

ただし

$$\mathbf{D}(\mathbf{r},t)=\varepsilon_0\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$$

電束密度(D), 電場の強さ(E)

$$\mathbf{H}(\mathbf{r},t)=\frac{1}{\mu_0}\mathbf{B}(\mathbf{r},t)$$

磁場の強さ(H), 磁束密度(B)

演習問題1

マクスウェルの方程式を説明せよ

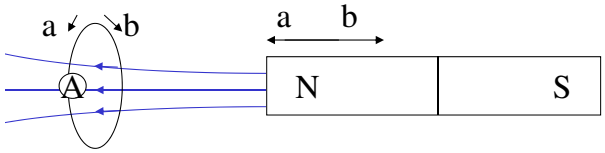
$$\nabla\cdot\mathbf{E}(\mathbf{r},t)=\frac{\rho(\mathbf{r},t)}{\varepsilon_0}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{B}(\mathbf{r},t)=0$$

$$\nabla\times\mathbf{E}(\mathbf{r},t)+\frac{\partial\mathbf{B}(\mathbf{r},t)}{\partial t}=0$$

$$\nabla\times\mathbf{B}(\mathbf{r},t)-\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\mathbf{E}(\mathbf{r},t)}{\partial t}=\mu_0\mathbf{i}(\mathbf{r},t)$$

ーファラデーの法則：電磁誘導ー



$$\oint_C \mathbf{E}(\mathbf{r},t)\cdot d\mathbf{s} = -\frac{\partial}{\partial t}\int_S \mathbf{B}(\mathbf{r},t)\cdot d\mathbf{S} = -\frac{\partial \Phi(t)}{\partial t}$$

↕ ファラデーの電磁誘導の法則

$$\nabla\times\mathbf{E}(\mathbf{r},t)+\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r},t)}{\partial t}=0$$

時間変動する磁場が電場を作る

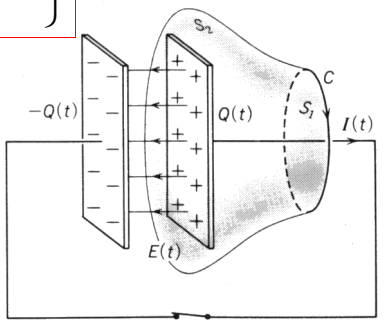
ーアンペールの法則と変位電流ー

$$\oint_C \mathbf{B}(\mathbf{r},t)\cdot d\mathbf{s} = \mu_0\int_S\left[\mathbf{i}(\mathbf{r},t)+\varepsilon_0\frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r},t)}{\partial t}\right]\cdot d\mathbf{S}$$

↕ マクスウェル・アンペールの法則

$$\nabla\times\mathbf{B}(\mathbf{r},t)=\mu_0\left\{\mathbf{i}(\mathbf{r},t)+\varepsilon_0\frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r},t)}{\partial t}\right\}$$

時間変動する電場が磁場を作る



演習問題2

マクスウェルの方程式から波動方程式を導出せよ

ρ=0, **i**=0の真空中でのマクスウェルの方程式を解く

・電磁誘導の式

$$\nabla\times\mathbf{E}(\mathbf{r},t)+\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r},t)}{\partial t}=0$$

$\nabla\times\ \rightarrow$

$$\nabla\times\{\nabla\times\mathbf{E}\}+\nabla\times\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}=0$$

$$-\nabla^2\mathbf{E}+\nabla\{\nabla\cdot\mathbf{E}\}+\nabla\times\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}=0$$

$\nabla\cdot\mathbf{E}=0 : \rho=0$ (電荷無し)

・マクスウェル・アンペールの式

$\frac{\partial}{\partial t}\ \rightarrow$

$$\nabla\times\mathbf{B}(\mathbf{r},t)-\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r},t)}{\partial t}=0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\mathbf{B})-\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2}=0$$

電磁場の波動方程式

$$\nabla^2\mathbf{E}(\mathbf{r},t)-\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\mathbf{E}(\mathbf{r},t)}{\partial t^2}=0$$

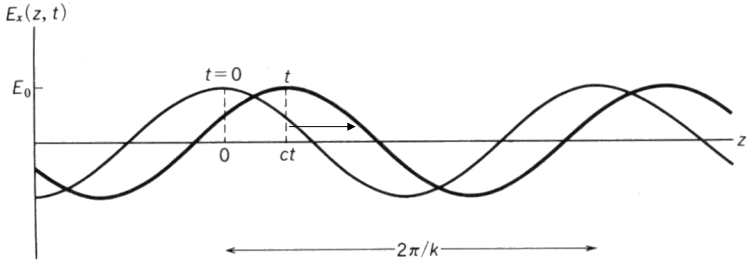
$$\nabla^2\mathbf{B}(\mathbf{r},t)-\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\mathbf{B}(\mathbf{r},t)}{\partial t^2}=0$$

たとえば、

z方向に進む単色平面波の解

$$\mathbf{E}(z,t)=\mathbf{E}_0\cos(\omega t-kz)$$

$$\mathbf{B}(z,t)=\mathbf{B}_0\cos(\omega t-kz)$$



位相速度：$v=\frac{\omega}{k}$，　波長：$\lambda=\frac{2\pi}{k}$

平面波

演習問題3

平面波が波動方程式の解であることを示せ

波動方程式

$$\nabla^2\mathbf{E}(\mathbf{r},t)-\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\mathbf{E}(\mathbf{r},t)}{\partial t^2}=0$$

に平面波の解を代入

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t)=\mathbf{E}_0\cos(\omega t-\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})$$

$$\downarrow$$

$$\mathbf{k}^2=\varepsilon_0\mu_0\omega^2 \longrightarrow k=\omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0} \longrightarrow v=\frac{\omega}{k}=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$$

真空中の光速　$c=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}=2.9979\times10^8\ \mathrm{m/s}$

一般の平面波

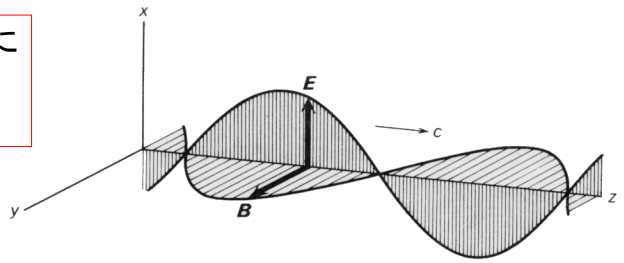
$$\left.\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{r},t)&=\mathbf{E}_0\cos(\omega t-\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})\\ \mathbf{B}(\mathbf{r},t)&=\mathbf{B}_0\cos(\omega t-\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})\end{aligned}\right\}$$ 波数ベクトルk方向に進む平面波

マクスウェルの式に代入、

$$\nabla\times\mathbf{E}(\mathbf{r},t)=-\frac{\partial\mathbf{B}(\mathbf{r},t)}{\partial t} \longrightarrow \mathbf{k}\times\mathbf{E}_0=\omega\mathbf{B}_0$$

$$\nabla\times\mathbf{B}(\mathbf{r},t)=\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\mathbf{E}(\mathbf{r},t)}{\partial t} \longrightarrow \mathbf{k}\times\mathbf{B}_0=-\omega\varepsilon_0\mu_0\mathbf{E}_0$$

$\mathbf{E}_0$, $\mathbf{B}_0$ は進行方向kに対して垂直で、かつ互いに垂直。



マクスウェルの方程式を解くことにより、変動する電磁場が真空中を波として伝わる。 → 電磁波

$$\nabla\times\mathbf{B}(\mathbf{r},t)-\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\mathbf{E}(\mathbf{r},t)}{\partial t}=0$$

$$\nabla\times\mathbf{E}(\mathbf{r},t)+\frac{\partial\mathbf{B}(\mathbf{r},t)}{\partial t}=0$$

→ 変動する磁場が「電磁誘導」によって電場を作り出す。

⇕

→ 変動する電場が「変位電流」として磁場を作り出す。

電磁場のエネルギーとポインティングベクトル

$$u=\frac{1}{2}\mathbf{E}\cdot\mathbf{D}+\frac{1}{2}\mathbf{H}\cdot\mathbf{B}$$
$$=\frac{1}{2}\varepsilon_0\mathbf{E}^2+\frac{1}{2\mu_0}\mathbf{B}^2$$

単位体積あたりのエネルギー密度

$\mathbf{S}=\mathbf{E}\times\mathbf{H}$ ポインティングベクトル → エネルギー密度の流れ

平面波 $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)=\mathbf{E}_0\cos(\omega t-\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})$

$\mathbf{B}(\mathbf{r},t)=\mathbf{B}_0\cos(\omega t-\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})$ の場合・・・

一周期の平均値 $\bar{u}=\frac{1}{2}\varepsilon_0|\mathbf{E}|^2$

$$|\bar{\mathbf{S}}|=c\bar{u}$$

電磁場の複素表示

$$\cos(\omega t-\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})\longrightarrow\exp[i(\omega t-\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})]$$
$$=\cos(\omega t-\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})+i\sin(\omega t-\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})$$

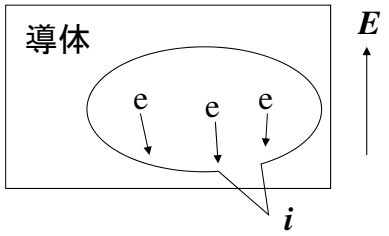
$$\mathbf{E}=\mathbf{E}_0\cos(\omega t-\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}+\varphi)$$

↓

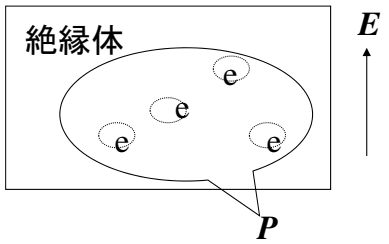
$$\tilde{\mathbf{E}}=\mathbf{E}_0\exp[i(\omega t-\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})+i\varphi]=\underline{\mathbf{E}_0e^{i\varphi}}e^{i\omega t}e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$$

複素振幅

等方物質中での電磁場

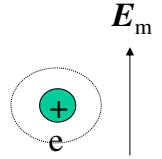


$\mathbf{i}=\sigma\mathbf{E}$



$\mathbf{i}=0$

$\mathbf{P}=?$



$\mathbf{p}=\alpha\mathbf{E}_m$

分極　分極率

$\mathbf{P}=N\mathbf{p}=N\alpha\mathbf{E}_m$

単位体積当たりの分子数

等方的な物質の場合

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}) = \varepsilon_0 \chi_e \mathbf{E}(\mathbf{r})$$

電気感受率　＞0　：電場と同じ向き

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}) = \varepsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}) + \mathbf{P}(\mathbf{r}) = \varepsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}) + \varepsilon_0 \chi_e \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \varepsilon_0 (1+\chi_e)\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \varepsilon \mathbf{E}(\mathbf{r})$$

ε:物質の誘電率

比誘電率　$\kappa = \dfrac{\varepsilon}{\varepsilon_0} > 1$

物質 (誘電体)中の静電場

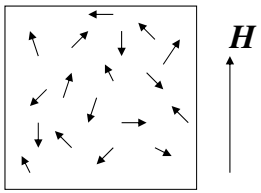
$$\int_S \mathbf{D}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = \int_V \rho(\mathbf{r}) dV$$
$$\oint_C \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{s} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}) = \rho(\mathbf{r})$$
$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0$$

磁化と磁場の強さ　磁性体中

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu_0 \mathbf{H}(\mathbf{r}) + \mu_0 \mathbf{M}(\mathbf{r})$$

磁化ベクトル



外部磁場Hにより、
内部に磁化Mが生じる。

$$\mathbf{M}(\mathbf{r}) = \chi_m \mathbf{H}(\mathbf{r})$$

磁化率

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu_0 \mathbf{H}(\mathbf{r}) + \mu_0 \mathbf{M}(\mathbf{r}) = \mu_0 (1+\chi_m)\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mu \mathbf{H}(\mathbf{r})$$

透磁率

物質(磁性体)中の静磁場

$$\int_S \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = 0$$
$$\oint_C \mathbf{H}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{s} = \int_S \mathbf{i}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0$$
$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mathbf{i}(\mathbf{r})$$

物質 (誘電体:i=0)中のマクスウェルの方程式

$$\nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r},t) = \rho(\mathbf{r},t)$$
$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r},t) = 0$$
$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r},t) + \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r},t)}{\partial t} = 0$$
$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r},t) - \frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{r},t)}{\partial t} = 0$$

ただし

$$\begin{aligned}\mathbf{D}(\mathbf{r},t) &= \varepsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r},t) + \mathbf{P}(\mathbf{r},t) \\ &= \varepsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r},t) + \varepsilon_0 \chi_e \mathbf{E}(\mathbf{r},t) \\ &= \varepsilon \mathbf{E}(\mathbf{r},t) \\ \mathbf{B}(\mathbf{r},t) &= \mu_0 \mathbf{H}(\mathbf{r},t) + \mu_0 \mathbf{M}(\mathbf{r},t) \\ &= \mu_0 (1+\chi_m)\mathbf{H}(\mathbf{r},t) \\ &= \mu \mathbf{H}(\mathbf{r},t)\end{aligned}$$

$\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$: 電場 ，　$\mathbf{D}(\mathbf{r},t)$: 電束密度
$\mathbf{H}(\mathbf{r},t)$: 磁場 ，　$\mathbf{B}(\mathbf{r},t)$: 磁束密度
$\mathbf{P}(\mathbf{r},t)$: 分極密度 ，　$\mathbf{M}(\mathbf{r},t)$: 磁化
ε : 誘電率 ，μ : 透磁率 ，χ_e : 電気感受率

真空中では
$\varepsilon = \varepsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12}$ F/m
$\mu = \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ H/m

物質中の電磁波

波動方程式:　$\varepsilon_0, \mu_0 \longrightarrow \varepsilon, \mu$

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0$$

物質中の光速:　$v = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$

物質の絶対屈折率:　$n = \dfrac{c}{v} = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \dfrac{\sqrt{\varepsilon\mu}}{1} \approx \sqrt{\dfrac{\varepsilon}{\varepsilon_0}} > 1$

屈折率nの物質中では光の波長は真空中の$1/n$倍、波数はn倍

$$\mathbf{k} \times \mathbf{E}_0 = \omega \mathbf{B}_0 , \quad \mathbf{k} \times \mathbf{B}_0 = -\omega\mu\varepsilon \mathbf{E}_0$$

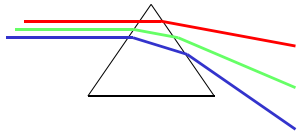
$$\longrightarrow Z = \left| \frac{\mathbf{E}_0}{\mathbf{H}_0} \right| = \left| \frac{\mathbf{E}_0}{\mathbf{B}_0 / \mu} \right| = \frac{\omega\mu}{k} = \frac{\omega\mu}{\omega\sqrt{\varepsilon\mu}} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$

固有インピーダンス

位相速度と群速度

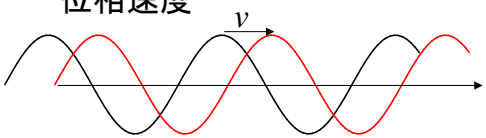
一般に誘電率ε、屈折率nは光の周波数(波長)に依存する。

$\varepsilon(\omega),\ n(\omega)$ ⟶ 分散



$$n(\omega)=\frac{c}{v(\omega)}=c\sqrt{\varepsilon(\omega)\mu}$$

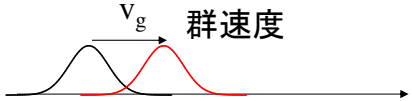
位相速度



$$v_g=\frac{d\omega}{dk}:\text{群速度}$$

真空中の光の場合

$$\omega=ck \longrightarrow v_g=c=v$$



一般にはv_g(群速度)とv(位相速度)は異なる。



光の反射、屈折

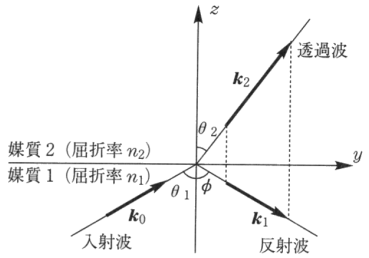


図２・６　反射と屈折における k ベクトルの関係

入射波
$\mathbf{E}_0\exp\{i(\omega t-\mathbf{k}_0\cdot\mathbf{r})\}$
反射波
$\mathbf{E}_1\exp\{i(\omega t-\mathbf{k}_1\cdot\mathbf{r})\}$
屈折波
$\mathbf{E}_2\exp\{i(\omega t-\mathbf{k}_2\cdot\mathbf{r})\}$

電場は境界面(z=0)で接線方向が連続

$$\mathbf{E}_{0t}\exp\{-ik_{0y}y\}+\mathbf{E}_{1t}\exp\{-i(k_{1x}x+k_{1y}y)\}=\mathbf{E}_{2t}\exp\{-i(k_{2x}x+k_{2y}y)\}$$

↓ z=0面内のx,yに関係なく成立のために

$$k_{1x}=k_{2x}=0,\quad k_{0y}=k_{1y}=k_{2y}$$

↓

$$k_0\sin\theta_1=k_1\sin\phi=k_2\sin\theta_2$$

↓

$$\theta_1=\phi,\ n_1\sin\theta_1=n_2\sin\theta_2$$

スネルの法則

振幅反射率r、透過率t　フレネルの公式

$$r_s=\frac{\sin(\theta_2-\theta_1)}{\sin(\theta_2+\theta_1)},\quad t_s=\frac{2\sin\theta_2\cos\theta_1}{\sin(\theta_2+\theta_1)}$$

$$r_p=\frac{\tan(\theta_1-\theta_2)}{\tan(\theta_1+\theta_2)},\quad t_p=\frac{2\cos\theta_1\sin\theta_2}{\sin(\theta_1+\theta_2)\cos(\theta_1-\theta_2)}$$

垂直入射(θ<<1)の場合

$$r=\frac{n_1-n_2}{n_1+n_2}$$

光強度の反射率R、透過率T

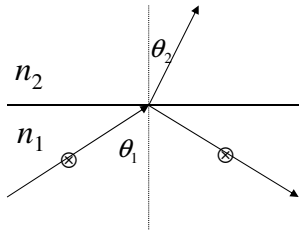
$$R_s=r_s^{\,2},\quad R_p=r_p^{\,2}$$

$$R_s+T_s=1,\quad R_p+T_p=1$$

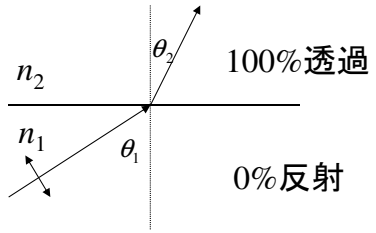
ブリュースター角

$$r_p=\frac{\tan(\theta_1-\theta_2)}{\tan(\theta_1+\theta_2)}$$

$$\theta_1+\theta_2=\frac{\pi}{2}\quad\left(\tan\theta_1=\frac{n_2}{n_1}\right)$$ のとき、r_p=0



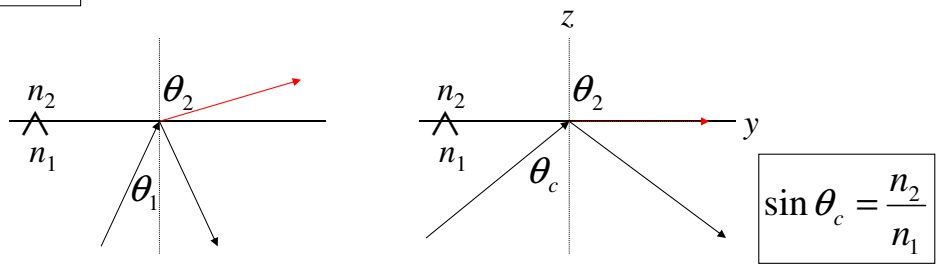
s偏光の場合



p偏光の場合

利用例：偏光ビームスプリッター、ガスレーザー

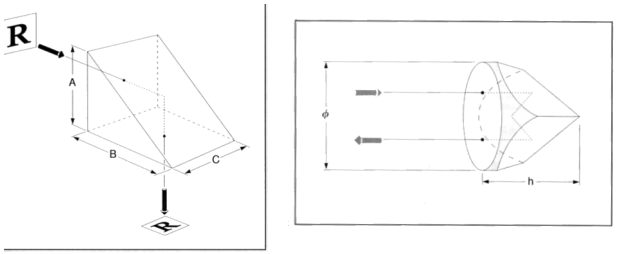
全反射



$$\sin\theta_c = \frac{n_2}{n_1}$$

$\theta_1 > \theta_c$のとき全反射する。

全反射利用例：プリズム、リトロリフレクター　　光ファイバー



エバネッセント波

$\theta_1 > \theta_c$のとき

$$k_{2y} = k_{1y} = k_1 \sin\theta_1 > k_1 \sin\theta_C = k_1 \frac{n_2}{n_1} = n_1 k \frac{n_2}{n_1} = n_2 k = k_2$$

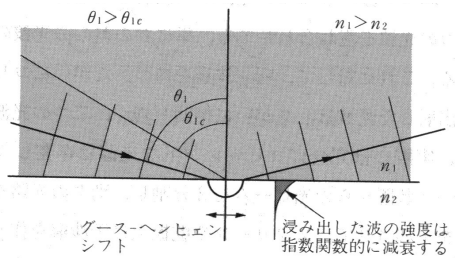
$$k_{2z}{}^2 = k_2{}^2 - k_{2y}{}^2 = k_2{}^2 - (k_1 \sin\theta_1)^2 = k_2{}^2 - (n_1 k \sin\theta_1)^2$$

$$= k_2{}^2 - \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 k_2^2 \sin^2\theta_1 = k_2{}^2 - k_2^2 \frac{\sin^2\theta_1}{\sin^2\theta_C} = k_2{}^2 \left\{1 - \left(\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_C}\right)^2\right\} < 0$$

$$\mathbf{E}_2 \exp\{i(\omega t - \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r})\} = \mathbf{E}_2 \exp(-\kappa z) \exp\{i(\omega t - k_{2y} y)\}$$

$$k_{2z} = i\kappa$$

エバネッセント波



例:SNOM

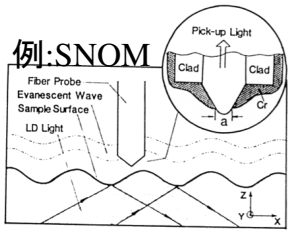


図 1　PSTM の基本原理図[13]