7.4 電磁波

$\rho=0$, $\mathbf{i}=0$の真空中でのマクスウェルの方程式

$$\begin{cases} \nabla\cdot\mathbf{E}(\mathbf{r},t)=0 \\ \nabla\cdot\mathbf{B}(\mathbf{r},t)=0 \\ \nabla\times\mathbf{B}(\mathbf{r},t)-\varepsilon_0\mu_0\dfrac{\partial\mathbf{E}(\mathbf{r},t)}{\partial t}=0 \qquad (7.33) \\ \nabla\times\mathbf{E}(\mathbf{r},t)+\dfrac{\partial\mathbf{B}(\mathbf{r},t)}{\partial t}=0 \qquad (7.32) \end{cases}$$

$$-\frac{\partial B_z(x,t)}{\partial x}-\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial E_y(x,t)}{\partial t}=0 \qquad (7.36)$$

$$\frac{\partial E_y(x,t)}{\partial x}+\frac{\partial B_z(x,t)}{\partial t}=0 \qquad (7.35)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(7.36)=-\frac{\partial^2 B_z(x,t)}{\partial t\partial x}-\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2 E_y(x,t)}{\partial t^2}=0$$

$$+)\quad \frac{\partial}{\partial x}(7.35)=\frac{\partial^2 E_y(x,t)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 B_z(x,t)}{\partial x\partial t}=0$$

$$\frac{\partial^2 E_y(x,t)}{\partial x^2}-\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2 E_y(x,t)}{\partial t^2}=0 \qquad (7.37)$$

同様に

$$\frac{\partial^2 B_z(x,t)}{\partial x^2}-\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2 B_z(x,t)}{\partial t^2}=0$$

波動方程式

$$\frac{\partial^2 E_y(x,t)}{\partial x^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E_y(x,t)}{\partial t^2}=0$$ の解

$$E_y(x,t)=E_0\cos(kx\mp\omega t)$$

$$\frac{\partial^2 E_y(x,t)}{\partial x^2}=-k^2E_0\cos(kx\mp\omega t)$$

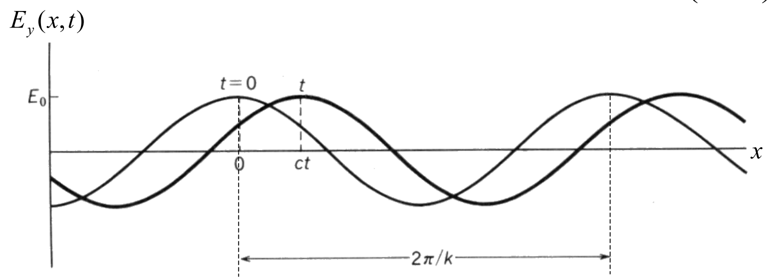
$$\frac{\partial^2 E_y(x,t)}{\partial t^2}=-\omega^2E_0\cos(kx\mp\omega t)$$

従って、

$$k^2-\frac{\omega^2}{c^2}=0 \longrightarrow \boxed{k=\frac{\omega}{c}} \qquad (7.39)$$

分散関係

$$E_y(x,t)=E_0\cos(kx\mp\omega t)=E_0\cos k(x\mp ct) \qquad (7.40)$$



t=0で、x=0でE_yは最大、t=tでは、x=±ctに移動。
すなわち、cos(kx-ωt)はx軸で正の向き、cos(kx+ωt)は負の向きに速さcで進む正弦波。

空間の周期 2π/k= λ ： 波長　　　k : 波数

$$B_z(x,t)=B_0\cos(kx\mp\omega t)$$

マクスウェルの方程式を解くことにより、変動する電磁場が真空中を波として伝わる。$\longrightarrow$ $\boxed{\text{電磁波}}$

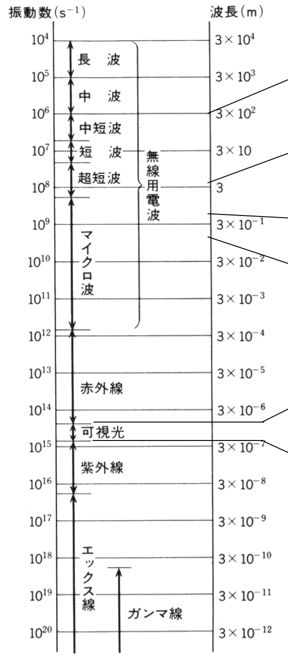
$$\nabla\times\mathbf{B}(\mathbf{r},t)-\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\mathbf{E}(\mathbf{r},t)}{\partial t}=0 \longrightarrow -\frac{\partial B_z(x,t)}{\partial x}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial E_y(x,t)}{\partial t}=0$$

$$\nabla\times\mathbf{E}(\mathbf{r},t)+\frac{\partial\mathbf{B}(\mathbf{r},t)}{\partial t}=0 \longrightarrow \frac{\partial E_y(x,t)}{\partial x}+\frac{\partial B_z(x,t)}{\partial t}=0$$

変動する磁場が「電磁誘導」によって電場を作り出す。

変動する電場が「変位電流」として磁場を作り出す。

光速 $\boxed{c=\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}=2.9979\times10^8\ \mathrm{m/s}}$

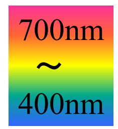


AMラジオ放送

FMラジオ放送
テレビ放送

携帯電話

衛星放送
電子レンジ



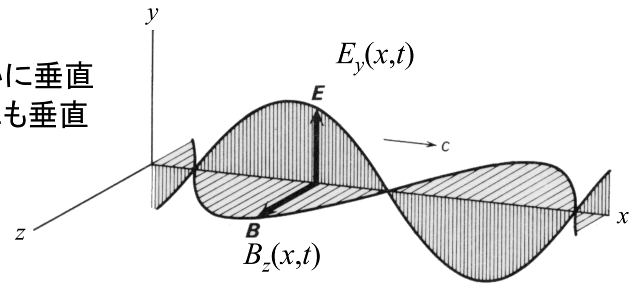
E_y, B_z を(7.36)に代入

$$-\frac{\partial B_z(x,t)}{\partial x}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial E_y(x,t)}{\partial t}=0$$

$$B_0k\,\cancel{\sin(kx\mp\omega t)}\mp\frac{\omega}{c^2}E_0\,\cancel{\sin(kx\mp\omega t)}=0$$

$$B_0k=\pm\frac{ck}{c^2}E_0 \longrightarrow B_0=\pm\frac{E_0}{c} \quad \left(H_0=\pm\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\right)$$

EとBは互いに垂直
進行方向にも垂直



波の重ね合わせの原理： $\cos k(x\pm ct)$が解なら$\cos k'(x\pm ct)$も解。

$$E_0\cos k(x\mp ct)+E_0'\cos k'(x\mp ct)+\cdots$$ も解。

任意関数 $f(x\pm ct)$も、波動方程式の解になる。

$$E_y(x,t)=f(x\mp ct)$$

$$B_z(x,t)=\pm\frac{1}{c}f(x\mp ct)$$

$$\longrightarrow H_z(x,t)=\pm\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}f(x\mp ct)$$

平面波の場合、進行方向を波数ベクトル**k**とすると、

$$\mathbf{E}=\mathbf{E}_0\cos(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}\pm\omega t)$$

$$\mathbf{H}=\mathbf{H}_0\cos(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}\pm\omega t)$$

エネルギー密度

$$u = u_e + u_m = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0}B^2$$

$$E_y(x,t) = f(x \mp ct)$$

$$B_z(x,t) = \pm\frac{1}{c}f(x \mp ct)$$ の場合

$$u = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_y^2 + \frac{1}{2\mu_0}B_z^2$$

$$= \frac{1}{2}\varepsilon_0 f(x \mp ct)^2 + \frac{1}{2\mu_0}\frac{1}{c^2}f(x \mp ct)^2$$

$$= \varepsilon_0 f(x \mp ct)^2 = \varepsilon_0 E_y(x \mp ct)^2$$

ポインティング・ベクトル　$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$

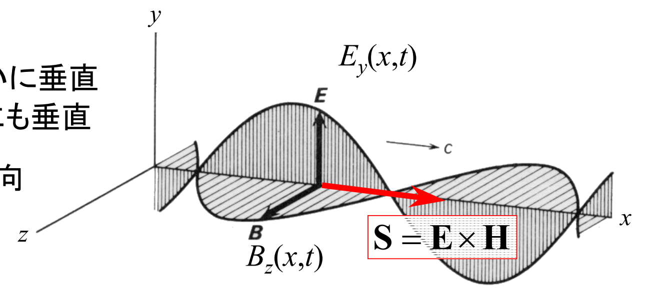
$$|\mathbf{S}| = |\mathbf{E} \times \mathbf{H}| = \frac{1}{\mu_0}E_y B_z = \pm\frac{1}{\mu_0}f(x \mp ct)^2 \cdot \frac{1}{c} = \pm\varepsilon_0 c f(x \mp ct)^2$$

$$= \pm c u(x,t)$$

エネルギー密度$u(x,t)$が、波の進行方向(x軸)に光速cで運ばれる。

EとBは互いに垂直
進行方向にも垂直

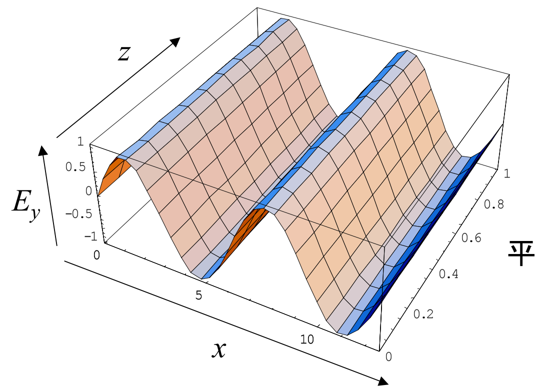
Sは進行方向



電磁波の放射と伝搬

電場、磁場が1方向のみに変化 : $E_y(x,t)$, $B_z(x,t)$
→電磁波はx軸に垂直な平面内で一定値をとる。

波面 : 波が一定の値をとる面



平面波

空間の1点で電磁波が発生する場合 :　球面波

・ρ=0, **i**=0の真空中での電磁誘導の式

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r},t) + \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r},t)}{\partial t} = 0$$

$\nabla \times \rightarrow$

$$\underline{\nabla \times \{\nabla \times \mathbf{E}\}} + \nabla \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$$

$$\underline{-\nabla^2\mathbf{E} + \nabla\{\nabla \cdot \mathbf{E}\}} + \nabla \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$$

・ρ=0, **i**=0の真空中でのマクスウェル・アンペールの式

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r},t) - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r},t)}{\partial t} = 0$$

$\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{B}) - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0$$

真空中の一般の電磁場の波動方程式

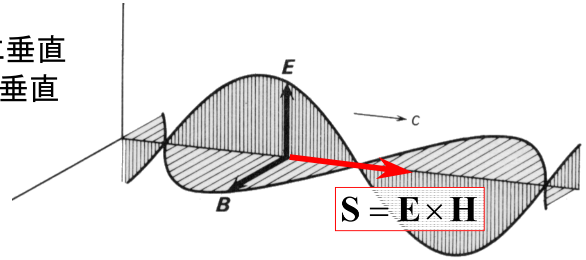
$$\nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{r},t) - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}(\mathbf{r},t)}{\partial t^2} = 0$$

$$\nabla^2 \mathbf{B}(\mathbf{r},t) - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}(\mathbf{r},t)}{\partial t^2} = 0$$

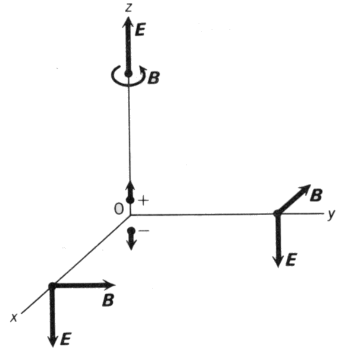
E, B は進行方向に対して垂直で、かつ互いに垂直。

Eと**B**は互いに垂直
進行方向にも垂直

Sは進行方向



荷電粒子の運動
↓
まわりの電磁場の時間的変動
↓
電磁波の伝播



振動する電気双極子の場合