今日の重要事項

波動方程式

真空中のマクスウェルの方程式を変形すると、一般の場合の波動方程式、

$$\nabla^2\mathbf{E}-\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbf{E}=0、\nabla^2\mathbf{B}-\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbf{B}=0$$

が得られる。この解が電磁波であり、平面波の場合、$\mathbf{k}$ を波数ベクトルとすると、

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t)=\mathbf{E}_0\exp[i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}\pm\omega t)]、\mathbf{B}(\mathbf{r},t)=\mathbf{B}_0\exp[i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}\pm\omega t)]$$

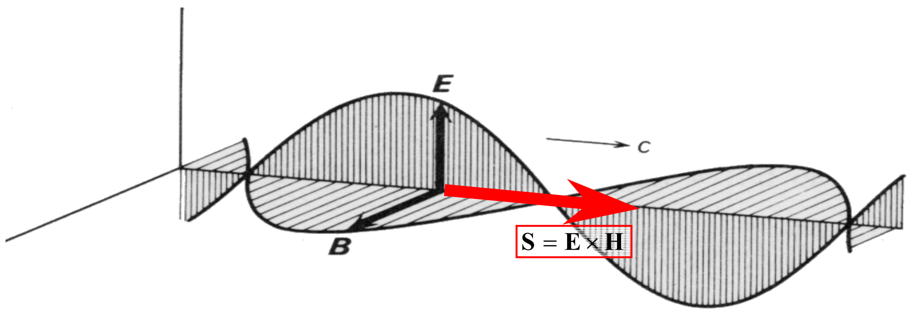
ただし、$\omega=ck$，$c=1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$ で、波数ベクトルの向きに速さ c で進む平面波をあらわしている。

電磁波のエネルギーとポインティングベクトル

電磁波のエネルギー密度：$u=u_e+u_m=\dfrac{\varepsilon_0}{2}E^2+\dfrac{1}{2\mu_0}B^2$

エネルギー密度の流れ：cu

エネルギーの流れ密度をあらわすベクトル：ポインティングベクトル $\mathbf{S}=\mathbf{E}\times\mathbf{H}$



小テストと解答例

真空(ρ=0、i=0)中のマクスウェルの方程式より、電磁波の波動方程式を求める。

1) ファラデーの電磁誘導の法則(微分形)を書け。

$$\nabla\times E=-\frac{\partial B}{\partial t}$$

2) マクスウェル・アンペールの法則(微分形)を書け。

$$\nabla\times B=\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial E}{\partial t}$$

3) 電場 $\boldsymbol{E}$、磁場 $\boldsymbol{B}$ が x と t にのみ依存するとき、1)式の z 成分、2)式の y 成分について計算せよ。

$$\nabla\times E(x,t)\big|_z=\frac{\partial}{\partial x}E_y(x,t)-\frac{\partial}{\partial y}E_x(x,t)=\frac{\partial}{\partial x}E_y(x,t)=-\frac{\partial}{\partial t}B_z(x,t)$$

$$\nabla\times B(x,t)\big|_y=\frac{\partial}{\partial z}B_x(x,t)-\frac{\partial}{\partial x}B_z(x,t)=-\frac{\partial}{\partial x}B_z(x,t)=\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial}{\partial t}E_y(x,t)$$

4) 3)の 2 つの式から、電場の y 成分 $E_y(x,t)$に関する波動方程式を求めよ。ただし、$\varepsilon_0\mu_0=\dfrac{1}{c^2}$ とする。

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}E_y(x,t)-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}E_y(x,t)=0$$

5) $E_y(x,t)=E_0\cos(kx-\omega t)$が解であることを示せ。このとき、$\omega$ と k と c の関係を書け。

4) の式に代入すると、

$-k^2E_0\cos(kx-\omega t)+\dfrac{1}{c^2}\omega^2E_0\cos(kx-\omega t)=0$ となり、

$\omega=ck$ のとき、解となる。

電磁気学 III のページ：http://www.phys.konan-u.ac.jp/~ichida/Lectures/Em3/index.html

市田の e-mail アドレス：ichida@konan-u.ac.jp