7.4 電磁波

ρ=0, **i**=0の真空中でのマクスウェルの方程式

$$\begin{cases} \nabla\cdot\mathbf{E}(\mathbf{r},t)=0 \\ \nabla\cdot\mathbf{B}(\mathbf{r},t)=0 \\ \nabla\times\mathbf{B}(\mathbf{r},t)-\varepsilon_0\mu_0\dfrac{\partial\mathbf{E}(\mathbf{r},t)}{\partial t}=0 \qquad (7.33) \\ \nabla\times\mathbf{E}(\mathbf{r},t)+\dfrac{\partial\mathbf{B}(\mathbf{r},t)}{\partial t}=0 \qquad (7.32) \end{cases}$$

自動的に満たされる。

電磁場がz方向のみに空間変化: $\mathbf{E}(x,t)=(E_x(x,t), E_y(x,t), E_z(x,t))$,
$\mathbf{B}(x,t)=(B_x(x,t), B_y(x,t), B_z(x,t))$

さらに、簡単のために、: $\mathbf{E}(x,t)=(0, E_y(x,t), 0)$,
$\mathbf{B}(x,t)=(0, 0, B_z(x,t))$

x成分

$$\{\nabla\times\mathbf{B}(x,t)\}_x=\frac{\partial B_z(x,t)}{\partial y}-\frac{\partial B_y(x,t)}{\partial z}=0$$

$$\{\nabla\times\mathbf{E}(x,t)\}_x=0$$

B, Eはxのみに依存するので、y, zの微分は0。

マクスウェル方程式

$$\{\nabla\times\mathbf{B}(x,t)\}_x-\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial E_x(x,t)}{\partial t}=0$$

$$\{\nabla\times\mathbf{E}(x,t)\}_x+\frac{\partial B_x(x,t)}{\partial t}=0$$

に代入すれば、

$$\frac{\partial E_x(x,t)}{\partial t}=\frac{\partial B_x(x,t)}{\partial t}=0$$

従って、電磁場のx成分は、t, xに依存しない。

y,z成分

$$\{\nabla\times\mathbf{B}(x,t)\}_y=\cancel{\frac{\partial B_x(x,t)}{\partial z}}-\frac{\partial B_z(x,t)}{\partial x}$$

$$\{\nabla\times\mathbf{B}(x,t)\}_z=\cancel{\frac{\partial B_y(x,t)}{\partial x}}-\cancel{\frac{\partial B_x(x,t)}{\partial y}}$$

E,**B**はx,tのみの関数

$$\{\nabla\times\mathbf{E}(x,t)\}_y=\cancel{\frac{\partial E_x(x,t)}{\partial z}}-\cancel{\frac{\partial E_z(x,t)}{\partial x}}$$

$E_z, B_y=0$

$$\{\nabla\times\mathbf{E}(x,t)\}_z=\frac{\partial E_y(x,t)}{\partial x}-\cancel{\frac{\partial E_x(x,t)}{\partial y}}$$

$$\begin{cases} \nabla\times\mathbf{B}(\mathbf{r},t)-\varepsilon_0\mu_0\dfrac{\partial\mathbf{E}(\mathbf{r},t)}{\partial t}=0 \\ \nabla\times\mathbf{E}(\mathbf{r},t)+\dfrac{\partial\mathbf{B}(\mathbf{r},t)}{\partial t}=0 \end{cases}$$

のy, z成分に代入。

$$-\frac{\partial B_z(x,t)}{\partial x}-\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial E_y(x,t)}{\partial t}=0 \qquad (7.36)$$

$$\frac{\partial E_y(x,t)}{\partial x}+\frac{\partial B_z(x,t)}{\partial t}=0 \qquad (7.35)$$

$$+)\quad \begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}(7.36) &= -\frac{\partial^2 B_z(x,t)}{\partial t \partial x} - \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2 E_y(x,t)}{\partial t^2} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial x}(7.35) &= \frac{\partial^2 E_y(x,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B_z(x,t)}{\partial x \partial t} = 0\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 E_y(x,t)}{\partial x^2} - \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2 E_y(x,t)}{\partial t^2} = 0 \qquad (7.37)$$

同様に

$$\frac{\partial^2 B_z(x,t)}{\partial x^2} - \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2 B_z(x,t)}{\partial t^2} = 0$$

一般形

$$\boxed{\frac{\partial^2 F(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 F(x,t)}{\partial t^2} = 0}$$ 波動方程式

$$\frac{\partial^2 E_y(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E_y(x,t)}{\partial t^2} = 0$$ の解

$$E_y(x,t) = E_0 \cos(kx \mp \omega t)$$

$$\frac{\partial^2 E_y(x,t)}{\partial x^2} = -k^2 E_0 \cos(kx \mp \omega t)$$

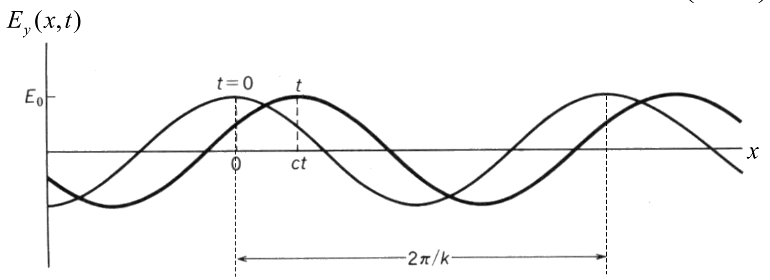
$$\frac{\partial^2 E_y(x,t)}{\partial t^2} = -\omega^2 E_0 \cos(kx \mp \omega t)$$

従って、

$$k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} = 0 \longrightarrow \boxed{k = \frac{\omega}{c}} \qquad (7.39)$$

分散関係

$$E_y(x,t) = E_0 \cos(kx \mp \omega t) = E_0 \cos k(x \mp ct) \qquad (7.40)$$



t=0で、x=0でE_yは最大、t=tでは、x=±ctに移動。
すなわち、cos(kx-ωt)はx軸で正の向き、cos(kx+ωt)は負の向きに速さcで進む正弦波。

空間の周期 2π/k= λ ： 波長　　　k : 波数

$$B_z(x,t) = B_0 \cos(kx \mp \omega t)$$

マクスウェルの方程式を解くことにより、変動する電磁場が真空中を波として伝わる。→ 電磁波

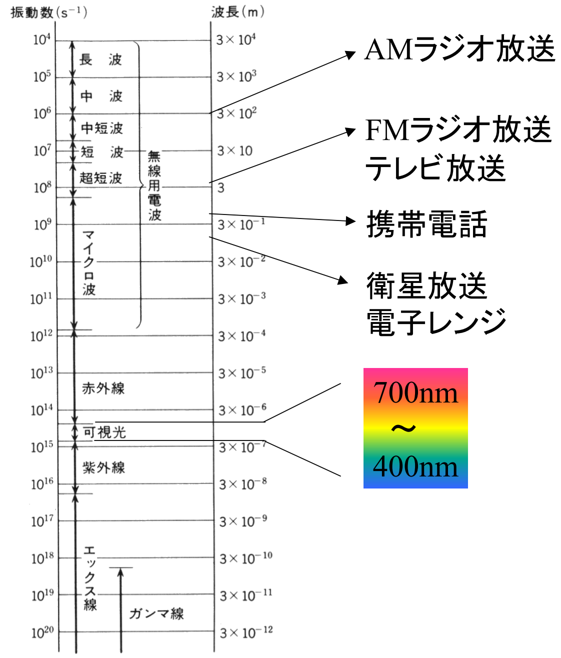
$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r},t) - \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r},t)}{\partial t} = 0 \longrightarrow -\frac{\partial B_z(x,t)}{\partial x} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial E_y(x,t)}{\partial t} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r},t) + \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r},t)}{\partial t} = 0 \longrightarrow \frac{\partial E_y(x,t)}{\partial x} + \frac{\partial B_z(x,t)}{\partial t} = 0$$

変動する磁場が「電磁誘導」によって電場を作り出す。

変動する電場が「変位電流」として磁場を作り出す。

光速 $$\boxed{c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} = 2.9979 \times 10^8\ \mathrm{m/s}}$$



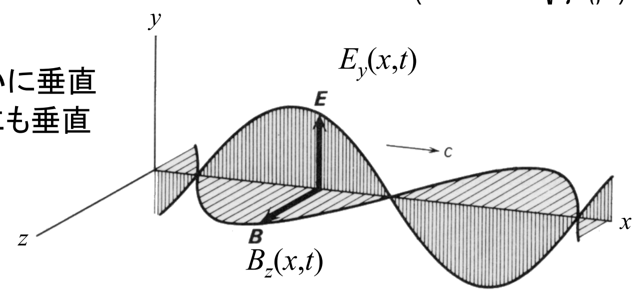
E_y, B_z を(7.36)に代入

$$-\frac{\partial B_z(x,t)}{\partial x}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial E_y(x,t)}{\partial t}=0$$

$$B_0 k\cancel{\sin(kx\mp\omega t)}\mp\frac{\omega}{c^2}E_0\cancel{\sin(kx\mp\omega t)}=0$$

$$B_0 k=\pm\frac{ck}{c^2}E_0 \longrightarrow B_0=\pm\frac{E_0}{c} \quad \left(H_0=\pm\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\right)$$

EとBは互いに垂直
進行方向にも垂直



波の重ね合わせの原理:　$\cos k(x\pm ct)$が解なら$\cos k'(x\pm ct)$も解。

$E_0\cos k(x\mp ct)+E_0'\cos k'(x\mp ct)+\cdots$　も解。

任意関数 $f(x\pm ct)$も、波動方程式の解になる。

$$E_y(x,t)=f(x\mp ct)$$

$$B_z(x,t)=\pm\frac{1}{c}f(x\mp ct)$$

$$\longrightarrow H_z(x,t)=\pm\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}f(x\mp ct)$$

平面波の場合、進行方向を波数ベクトル**k**とすると、

$$\mathbf{E}=\mathbf{E}_0\cos(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}\pm\omega t)$$

$$\mathbf{H}=\mathbf{H}_0\cos(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}\pm\omega t)$$