今日の重要事項

電磁波（真空中、$\rho=0$, $\mathbf{i}=0$）

$$\nabla\cdot\mathbf{E}=0$$

$$\nabla\cdot\mathbf{B}(\mathbf{r},t)=0$$

$$\nabla\times\mathbf{E}(\mathbf{r},t)=-\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{B}(\mathbf{r},t)$$

$$\nabla\times\mathbf{B}(\mathbf{r},t)=\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$$

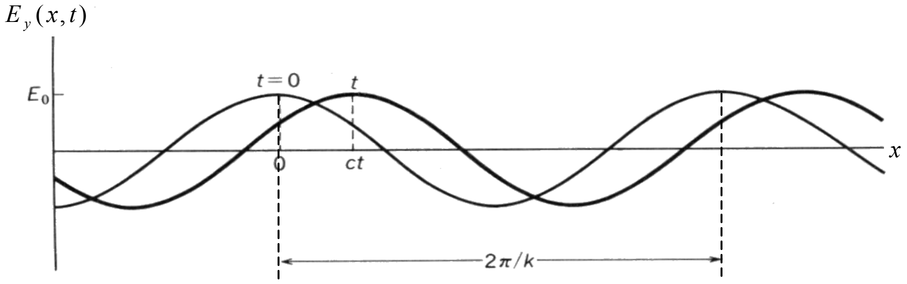
を変形。電場、磁場が x と t のみの関数の場合、波動方程式

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}E_y-\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}E_y=0、\frac{\partial^2}{\partial x^2}B_z-\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}B_z=0$$

が得られる。この解が電磁波であり、

$$E_y(x,t)=E_0\cos(kx\pm\omega t)、B_z(x,t)=B_0\cos(kx\pm\omega t)$$

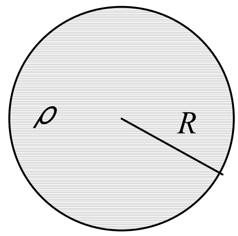
ただし、$\omega=ck$, $c=1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$ で、x 軸の方向で速さ c で進む波をあらわしている。



小テストと解答例

半径 R の球の内部に電荷が密度 ρ で一様に分布している。球の中心からの距離 r における、静電ポテンシャル ϕ (r) を求める。

（解答）ポアソン方程式は $\nabla^2\phi(r)=-\dfrac{\rho(r)}{\varepsilon_0}$



$\nabla^2\phi(r)=\dfrac{1}{r}\dfrac{d^2}{dr^2}[r\phi(r)]$ より、

$$\nabla^2\phi(r)=\frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}[r\phi(r)]=-\frac{\rho(r)}{\varepsilon_0}$$

$r>R$ では $\rho(r)=0$ なので、$r\phi(r)=C_1r+C_2$。よって、$\phi(r)=C_1+C_2/r$

また、$r<R$ では $\rho(r)=\rho$ より、$\dfrac{d^2}{dr^2}[r\phi(r)]=-\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}r$ から、$\phi(r)=-\dfrac{\rho}{6\varepsilon_0}r^2+C_3+\dfrac{C_4}{r}$。

$r=0$ で有限なので $C_4=0$。$r\to\infty$ で $\phi(r)=0$ から $C_1=0$。あとは、$r=R$ での連続の条件から，

$C_2=\dfrac{R^3\rho}{3\varepsilon_0}, C_3=\dfrac{R^2\rho}{2\varepsilon_0}$ である。

演習問題

真空($\rho=0$、$i=0$)中のマクスウェルの方程式より、電磁波の波動方程式を求めよ。

電磁気学 III のページ：http://www.phys.konan-u.ac.jp/~ichida/Lectures/Em3/index.html
市田の e-mail アドレス：ichida@konan-u.ac.jp