今日の重要事項

電磁場の基本法則(マクスウェルの方程式)

積分形　　　　　　　　　　　　微分形

$$\int_S \mathbf{E}(\mathbf{r},t)\cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho(\mathbf{r},t)dV \quad\Leftrightarrow\quad \nabla\cdot\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho(\mathbf{r},t)$$

$$\oint_C \mathbf{E}(\mathbf{r},t)\cdot d\mathbf{s} = -\frac{\partial}{\partial t}\int_S \mathbf{B}(\mathbf{r},t)\cdot d\mathbf{S} \quad\Leftrightarrow\quad \nabla\times\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = -\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{B}(\mathbf{r},t)$$

$$\int_S \mathbf{B}(\mathbf{r},t)\cdot d\mathbf{S} = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \nabla\cdot\mathbf{B}(\mathbf{r},t) = 0$$

$$\oint_C \mathbf{B}(\mathbf{r},t)\cdot d\mathbf{s} = \mu_0\int_S \{\mathbf{i}(\mathbf{r},t)+\varepsilon_0\frac{\partial\mathbf{E}(\mathbf{r},t)}{\partial t}\}\cdot d\mathbf{S} \quad\Leftrightarrow\quad \nabla\times\mathbf{B}(\mathbf{r},t) = \mu_0\mathbf{i}(\mathbf{r},t)+\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$$

ガウスの定理 : $\int_V \{\nabla\cdot\mathbf{E}(\mathbf{r})\}dV = \int_S \mathbf{E}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{S}$

ストークスの定理 : $\int_S \{\nabla\times\mathbf{E}(\mathbf{r})\}\cdot d\mathbf{S} = \oint_C \mathbf{E}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{s}$

小テストと解答例

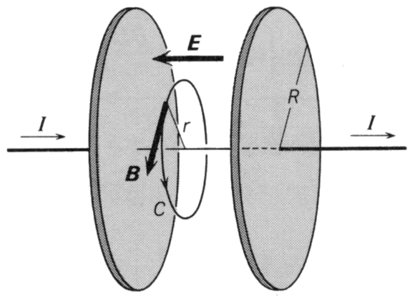
半径 R の円形の平面コンデンサーを充電し、極板間を導線でつないで放電させた。

1)　コンデンサーの電荷 $Q(t)$ と電流 $I(t)$ の関係式を書け。

電流が流れると電荷が減少するので、 $\dfrac{dQ(t)}{dt} = -I(t)$

2)　コンデンサーの電荷が $Q(t)$ のとき、極板間の電場 $E(t)$ を求めよ。ただし、図で右向きを正とする。

電場は左向きなので、 $E(t) = -\dfrac{Q(t)}{\varepsilon_0\pi R^2}$



3)　変位電流を $I(t)$ を用いて書け。

$$i_d(t) = \varepsilon_0\frac{\partial E(t)}{\partial t} = -\frac{1}{\pi R^2}\frac{\partial Q(t)}{\partial t} = \frac{I(t)}{\pi R^2}$$

4)　マクスウェル・アンペールの法則を書け。

$$\oint_C B\cdot ds = \mu_0\int_S \{i+\varepsilon_0\frac{\partial E}{\partial t}\}\cdot dS$$

5)　極板間に生じる磁束密度の大きさを、極板の中心からの距離 r の関数 $B(r)$ として $r<R$ の場合について求めよ。

閉曲線 C として、図のような極板間の半径 r の円とすると、

$$(\text{左辺}) = \oint_C B\cdot ds = 2\pi rB(r)$$

一方右辺は、極板間に電流は無いので、3)の結果を用いると、$r<R$ の場合、

$$(\text{右辺}) = \mu_0\int_S \varepsilon_0\frac{\partial E}{\partial t}\cdot dS = \mu_0\frac{I(t)}{\pi R^2}\times\pi r^2$$

従って、

$$B(r) = \frac{\mu_0 rI(t)}{2\pi R^2}$$

演習問題

積分形の電場・磁場に対するガウスの法則、ファラデーの電磁誘導の法則、マクスウェル・アンペールの法則から、ガウスの定理とストークスの定理を用いて、微分形のマクスウェルの方程式を導出せよ。

電磁気学 III のページ：http://www.phys.konan-u.ac.jp/~ichida/Lectures/Em3/index.html

市田の e-mail アドレス：ichida@konan-u.ac.jp