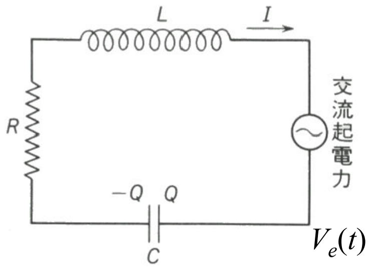
6-7 振動電流

- 直流回路　$V = RI$
- 交流回路
  右図のような回路、電流の向きを正と考えると



$V_{\mathrm{R}} = RI(t)$ ：電圧降下

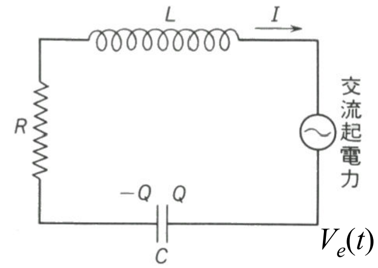
$$V_{\mathrm{L}} = -L\frac{\mathrm{d}I(t)}{\mathrm{d}t}$$

$$V_{\mathrm{C}} = -\frac{Q(t)}{C}$$

キルヒホフの第二法則から

$$V_e(t) - L\frac{\mathrm{d}I(t)}{\mathrm{d}t} - RI(t) - \frac{Q(t)}{C} = 0$$

$$L\frac{\mathrm{d}I(t)}{\mathrm{d}t} + RI(t) + \frac{Q(t)}{C} = V_e(t)$$



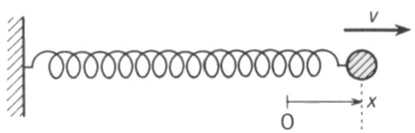
コンデンサーに流れる電流
→ $Q(t)$を増加させる。

$$\frac{\mathrm{d}Q(t)}{\mathrm{d}t} = I(t)$$

$$\longrightarrow L\frac{\mathrm{d}^2Q(t)}{\mathrm{d}t^2} + R\frac{\mathrm{d}Q(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{Q(t)}{C} = V_e(t)$$

これを解く！！

- バネにつけたおもりの運動
  質量m、速度v、バネ定数k、粘性抵抗係数ρ、外力f



$$m\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} = -kx - \rho v + f$$

$$\longrightarrow m\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} + kx + \rho v = f$$

$$v \leftrightarrow I,\ \ x \leftrightarrow Q,\ \ m \leftrightarrow L,\ \ k \leftrightarrow 1/C,\ \ f \leftrightarrow V_e$$

の対応で、先程の微分方程式と同形

交流回路とおもりの運動は同様の現象が起こる。

複素インピーダンス

交流起電力が

$V_e(t) = V_0 \cos(\omega t + \alpha)$　として、微分方程式を解く。

電流$I(t)$、電荷$Q(t)$は、

$I(t) = I_0 \cos(\omega t + \beta)$

$Q(t) = Q_0 \cos(\omega t + \gamma)$

α, β, γ : 位相
V_0, I_0, Q_0 : 振幅

として、微分方程式

$$\begin{cases} L\dfrac{\mathrm{d}I(t)}{\mathrm{d}t} + RI(t) + \dfrac{Q(t)}{C} = V_e(t) \\ \dfrac{\mathrm{d}Q(t)}{\mathrm{d}t} = I(t) \end{cases}$$

に代入すれば、解けるが、複雑。そこで・・・・・

オイラーの関係式 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ で、複素表示で解く。

$$\begin{cases} \hat{V}_e(t) = V_0 e^{i(\omega t+\alpha)} = \hat{V} e^{i\omega t}, \quad \hat{V} = V_0 e^{i\alpha} \\ \hat{I}(t) = I_0 e^{i(\omega t+\beta)} = \hat{I} e^{i\omega t}, \quad \hat{I} = I_0 e^{i\beta} \\ \hat{Q}(t) = Q_0 e^{i(\omega t+\gamma)} = \hat{Q} e^{i\omega t}, \quad \hat{Q} = Q_0 e^{i\gamma} \end{cases}$$

これらの実部が物理的意味を持つ。

複素数の微分方程式、

$$\begin{cases} L\dfrac{\mathrm{d}\hat{I}(t)}{\mathrm{d}t} + R\hat{I}(t) + \dfrac{\hat{Q}(t)}{C} = \hat{V}_e(t) \\ \dfrac{\mathrm{d}\hat{Q}(t)}{\mathrm{d}t} = \hat{I}(t) \end{cases}$$

の解の実部が求める解である。

$$\frac{\mathrm{d}\hat{Q}(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{Q}e^{i\omega t} = i\omega\hat{Q}e^{i\omega t} = \hat{I}e^{i\omega t}$$

$$\therefore i\omega\hat{Q} = \hat{I}$$

$$L\frac{\mathrm{d}\hat{I}(t)}{\mathrm{d}t} + R\hat{I}(t) + \frac{\hat{Q}(t)}{C} = \hat{V}(t)$$

$$Li\omega\hat{I}\cancel{e^{i\omega t}} + R\hat{I}\cancel{e^{i\omega t}} + \frac{1}{C}\hat{Q}\cancel{e^{i\omega t}} = \hat{V}\cancel{e^{i\omega t}}$$

代入

$$\therefore i\omega L\hat{I} + R\hat{I} + \frac{1}{C}\hat{Q} = \hat{V}$$

$$(i\omega L + R + \frac{1}{i\omega C})\hat{I} = \hat{V}$$

交流回路 ⟷ 直流回路

$$\boxed{\begin{aligned} \hat{I} &= \frac{\hat{V}}{\hat{Z}} \\ \hat{Z} &= R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \end{aligned}}$$

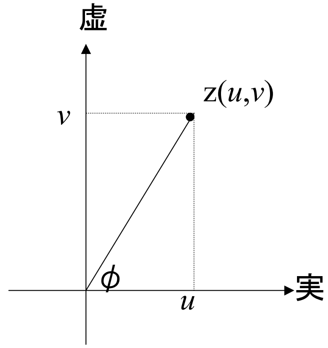
インピーダンス

$$I = \frac{V}{R}$$

複素平面

$$z = u + iv$$
$$= \sqrt{u^2 + v^2}(\cos\phi + i\sin\phi)$$
$$= |z| e^{i\phi}$$

$$\tan\phi = \frac{v}{u}$$



インピーダンス を絶対値と位相で表す。

$$\left|\hat{Z}\right| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

$$\tan\phi = \frac{\omega L - 1/(\omega C)}{R}$$

$$\longrightarrow \boxed{\hat{Z} = \sqrt{R^2 + (\omega L - 1/(\omega C))^2}\, e^{i\phi}}$$

$\hat{I} = \dfrac{\hat{V}}{\hat{Z}}$ に代入して

$$I_0 e^{i\beta} = \frac{V_0 e^{i\alpha}}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/(\omega C))^2}\, e^{i\phi}} \longrightarrow \beta = \alpha - \phi$$

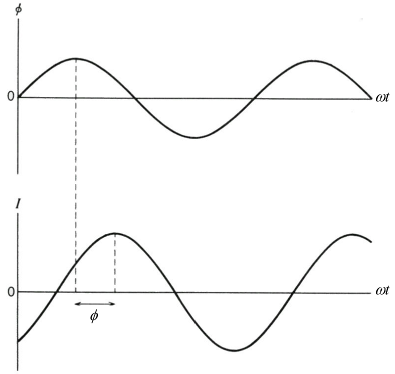
$$I(t) = \mathrm{Re}[\hat{I}(t)] = \mathrm{Re}[I_0 e^{i\beta} e^{i\omega t}]$$
$$= \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/(\omega C))^2}} \cos(\omega t + \alpha - \phi)$$

•$I(t)$は、起電力$V_e(t)$に比例せず位相 ϕだけずれる。
•振幅は ωに依存する。

$\omega L - \dfrac{1}{\omega C} = 0$ のとき、振幅最大。

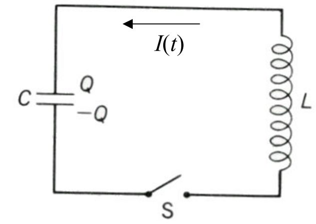
↓

$\boxed{\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}}$: 共鳴振動数



例題

コンデンサーCにコイルLをつなぎスイッチを開いてコンデンサーに電荷$\pm Q_0$を与える。スイッチを閉じた後の電荷と電流の時間変化は? またコンデンサーに蓄えられるエネルギーとコイルに蓄えられるエネルギーはどう変わるか?



$$\begin{cases} -L\dfrac{dI(t)}{dt} - \dfrac{Q(t)}{C} = 0 \\ I(t) = \dfrac{dQ(t)}{dt} \end{cases}$$

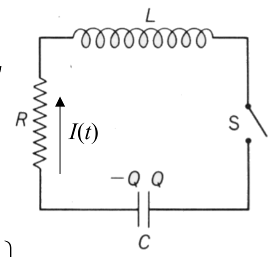
$\longrightarrow \dfrac{d^2Q(t)}{dt^2} = -\dfrac{1}{LC}Q(t) \longrightarrow Q(t) = Q_0\cos(\omega_0 t)$

$I(t) = -\omega_0 Q_0 \sin(\omega_0 t)$

$\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$

例題

コンデンサーC、コイルL、抵抗Rを直列につなぎ、スイッチを開いてコンデンサーに電荷$\pm Q_0$を与える。スイッチを閉じたとき、回路に流れる電流の時間変化は?



$$\begin{cases} -L\dfrac{dI(t)}{dt} - \dfrac{Q(t)}{C} - RI(t) = 0 \\ I(t) = \dfrac{dQ(t)}{dt} \end{cases} \qquad \hat{Z} = R + i\left\{\omega L - \frac{1}{\omega C}\right\}$$

$\longrightarrow L\dfrac{d^2Q(t)}{dt^2} + R\dfrac{dQ(t)}{dt} + \dfrac{Q(t)}{C} = 0$

$Q(t) = \hat{Q}_0 e^{i\omega t}$ とおいて解く。

$\longrightarrow \omega^2 - i\dfrac{R}{L}\omega - \dfrac{1}{LC} = \omega^2 - i\dfrac{R}{L}\omega - {\omega_0}^2 = 0$

$\hat{Z} = R + i\left\{\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right\} = 0$ と等価

$$\omega^2 - i\frac{R}{L}\omega - {\omega_0}^2 = 0$$

${\omega_0}^2 > (R/2L)^2$ のとき、

$$\omega_\pm = \frac{iR}{2L} \pm \sqrt{{\omega_0}^2 - \frac{R^2}{4L^2}}$$

↓ 一般解は $e^{i\omega_+ t}$ と $e^{i\omega_- t}$ の重ね合わせ

$Q(t) = Q_0 e^{-\frac{R}{2L}t}\cos\left(\sqrt{{\omega_0}^2 - \dfrac{R^2}{4L^2}}\,t + \alpha\right)$ 減衰振動