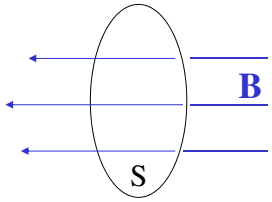
電磁気学II

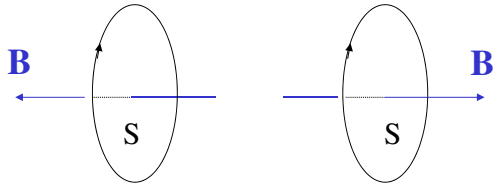
1. 電磁気学Iのおさらい
2. 電流と電流密度
3. オームの法則
4. 金属電子論
5. 準定常電流
6. 電流間に生じる力と磁場
7. ローレンツ力
8. 電流が作る磁場
9. アンペールの法則
10. 前半のまとめと確認
11. 磁束と電磁誘導
12. 自己インダクタンスと相互インダクタンス
13. 磁場のエネルギー
14. 交流回路と複素インピーダンス
15. まとめ

磁束 (magnetic flux): Φ



一様な磁場中

$\Phi = BS$



$\Phi > 0$ $\Phi < 0$

右ネジの関係

回路を貫く磁束が変化すると「電流が流れる」。

⇕

回路を貫く磁束が変化すると「起電力が発生する」。

↓

電磁誘導により生じる起電力(ポテンシャル) V_{e}

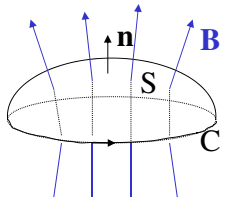
$$V_{\mathrm{e}} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$$

ファラデーの誘導法則

- 磁束の時間変化に比例
- 磁束の時間変化を打ち消す向きに生じる

- 回路を貫く磁束:Φ

$$\Phi = \int_S \mathbf{B}\cdot\mathbf{n}dS$$



- 回路に生じた起電力:V_{e} =曲線Cにそって電場を線積分

$$V_e = \oint_C \mathbf{E}\cdot\mathbf{t}dl$$

ファラデーの誘導法則

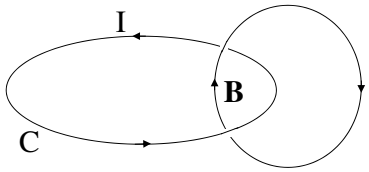
$$\oint_C \mathbf{E}\cdot\mathbf{t}dl = -\frac{d}{dt}\int_S \mathbf{B}\cdot\mathbf{n}dS$$

$$\nabla\times\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}$$

微分形

4.2 自己インダクタンス

閉じた回路に電流を流すと、自分自身の回路も貫く。



•BはIに比例
•ΦはBに比例

$$\Phi = LI$$

準定常電流：電流の変化があまり速くないとき

$$\Phi(t) = LI(t)$$

変化する磁束は回路に誘導起電力V_eを生じさせる。

$$V_e = -\frac{\mathrm{d}\Phi(t)}{\mathrm{d}t}$$

$$V_e = -\frac{\mathrm{d}\Phi(t)}{\mathrm{d}t} = -L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$$

起電力は電流が増えると減らす向きに、減ると増える向きに。

⇩

自己誘導

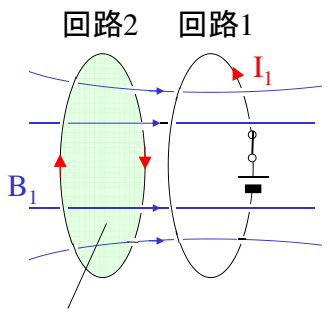
L: 自己インダクタンス(自己誘導係数)

インダクタンスの単位：H (ヘンリー)

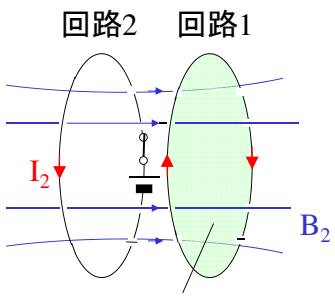
$1\mathrm{H} = 1\mathrm{V}\cdot\mathrm{s}\cdot\mathrm{A}^{-1}$

4.3 相互インダクタンス

相互誘導



$$\Phi_2 = M_{21}I_1$$



$$\Phi_1 = M_{12}I_2$$

回路1に流れる電流I_1に比例した磁場B_1が生じ、回路2を貫く磁束Φ_2も、I_1に比例する。
比例係数:M_{21}

回路2に流れる電流I_2に比例した磁場B_2が生じ、回路1を貫く磁束Φ_1も、I_2に比例する。
比例係数:M_{12}

I_1が時間変化するとき、
回路2に生じる誘導起電力V_2は

$$V_2 = -\frac{\mathrm{d}\Phi_2}{\mathrm{d}t} = -M_{21}\frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t}$$

同様にV_1は

$$V_1 = -\frac{\mathrm{d}\Phi_1}{\mathrm{d}t} = -M_{12}\frac{\mathrm{d}I_2}{\mathrm{d}t}$$

M_{21}, M_{12}: 相互インダクタンス
(相互誘導係数)

$$M_{21} = M_{12} \equiv M$$

電磁場のエネルギー

単位体積あたりの電場のエネルギー

$$u_e = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 = \frac{1}{2\varepsilon_0}D^2 = \frac{1}{2}ED \qquad (2.13)$$

単位体積あたりの磁場のエネルギーu_mは

$$u_m = \frac{1}{2\mu_0}B^2 = \frac{1}{2}\mu_0 H^2 = \frac{1}{2}BH \qquad (4.5)$$

4.5 LC振動回路

$$V_C(t) = -\frac{Q(t)}{C}$$

$$V_L(t) = -L\frac{dI(t)}{dt}$$

$$V_C(t) + V_L(t) = 0$$

$$\downarrow$$

$$L\frac{d^2Q(t)}{dt^2} + \frac{Q(t)}{C} = 0$$

$$\updownarrow$$

$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2} + kx(t) = 0$$

単振動

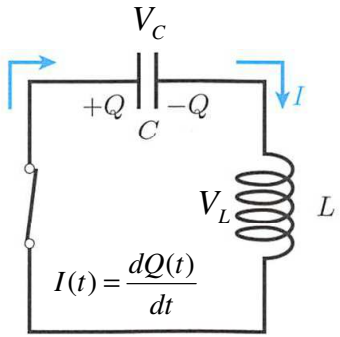
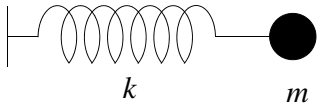


図 4.6 LC 振動回路



4.6 交流回路と複素インピーダンス

•直流回路　$V = RI$

•交流回路

$$\begin{cases} L\dfrac{\mathrm{d}I(t)}{\mathrm{d}t} + RI(t) + \dfrac{Q(t)}{C} = V(t) \\ \dfrac{\mathrm{d}Q(t)}{\mathrm{d}t} = I(t) \end{cases}$$

$V(t) = V_0\cos(\omega t)$　として解く

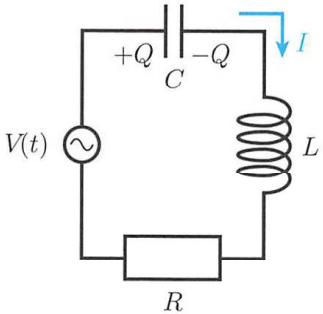


図 4.8 LCR 回路

$$\begin{cases} \hat{V}(t) = V_0 e^{i(\omega t)} \\ \hat{I}(t) = I_0 e^{i(\omega t+\alpha)} = I_0 e^{i\alpha}e^{i\omega t} \\ \hat{Q}(t) = Q_0 e^{i(\omega t+\beta)} = Q_0 e^{i\beta}e^{i\omega t} \end{cases}$$

複素化！

交流回路 ⟷ 直流回路

$$\boxed{\begin{aligned} V_0 &= \hat{Z}\hat{I} \\ \hat{Z} &= R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \end{aligned}}$$

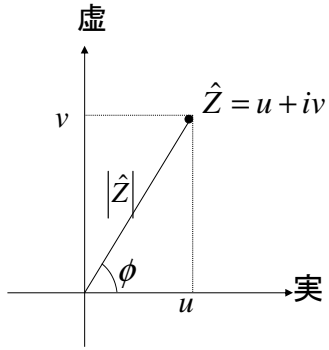
インピーダンス

$$V = RI$$

複素平面

$$\left|\hat{Z}\right| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

$$\tan\phi = \frac{\omega L - 1/(\omega C)}{R}$$



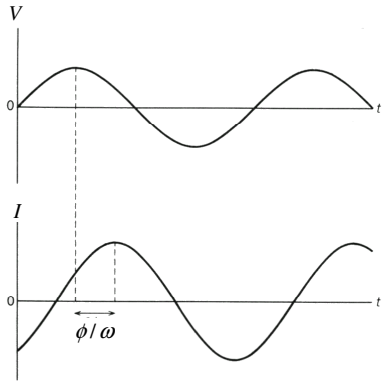
$$I(t) = \mathrm{Re}[\hat{I}(t)] = \mathrm{Re}[I_0 e^{i\alpha} e^{i\omega t}] = \mathrm{Re}[I_0 e^{-i\phi} e^{i\omega t}]$$

$$= \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/(\omega C))^2}} \cos(\omega t - \phi) \qquad \tan\phi = \frac{\omega L - 1/(\omega C)}{R}$$

- $I(t)$は、起電力$V(t)$に比例せず位相φだけずれる。
- 振幅はωに依存する。

$\omega L - \dfrac{1}{\omega C} = 0$ のとき、振幅最大。

$$\boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$$: 共鳴振動数



$$\hat{Q}(t) = Q_0 e^{i\beta} e^{i\omega t} = \frac{\hat{I}(t)}{i\omega} = \frac{-i}{\omega} I_0 e^{-i\phi} e^{i\omega t} = \frac{I_0}{\omega} e^{-\frac{\pi}{2}i} e^{-i\phi} e^{i\omega t}$$

$$Q(t) = \mathrm{Re}[\hat{Q}(t)] = \frac{V_0}{\omega\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/(\omega C))^2}} \cos(\omega t - \phi - \frac{\pi}{2})$$

- Q(t)は、電流$I(t)$に対して位相がπ/2ずれる。
- 振幅はωに依存する。