電磁気学II

1. 電磁気学Iのおさらい
2. 電流と電流密度
3. オームの法則
4. 金属電子論
5. 準定常電流
6. 電流間に生じる力と磁場
7. ローレンツ力
8. 電流が作る磁場
9. アンペールの法則
10. 前半のまとめと確認
11. 磁束と電磁誘導
12. 自己インダクタンスと相互インダクタンス
13. 磁場のエネルギー
14. 交流回路と複素インピーダンス
15. まとめ

4.5 LC振動回路

$$V_C(t) = -\frac{Q(t)}{C}$$

$$V_L(t) = -L\frac{dI(t)}{dt}$$

$$V_C(t) + V_L(t) = 0$$

$$\downarrow$$

$$L\frac{d^2Q(t)}{dt^2} + \frac{Q(t)}{C} = 0$$

$$\updownarrow$$

$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2} + kx(t) = 0$$

単振動

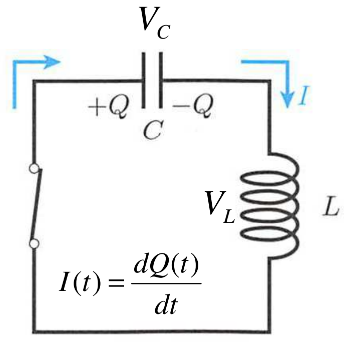
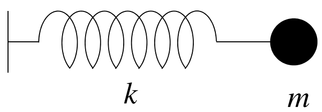


図 4.6 LC 振動回路



4.6 交流回路と複素インピーダンス

•直流回路 $V = RI$

•交流回路 $V_\mathrm{R} = RI(t)$ ：電圧降下

$$V_\mathrm{L} = -L\frac{\mathrm{d}I(t)}{\mathrm{d}t}$$

$$V_\mathrm{C} = -\frac{Q(t)}{C}$$

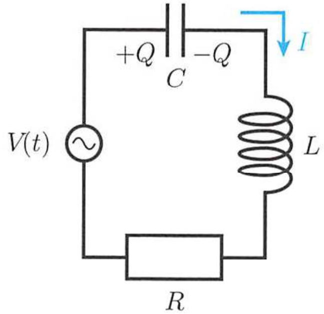


図 4.8 LCR 回路

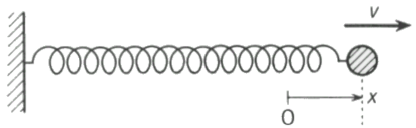
$$V_e(t) - L\frac{\mathrm{d}I(t)}{\mathrm{d}t} - RI(t) - \frac{Q(t)}{C} = 0$$

$$\longrightarrow \quad L\frac{\mathrm{d}I(t)}{\mathrm{d}t} + RI(t) + \frac{Q(t)}{C} = V(t)$$

コンデンサーに流れる電流 → $Q(t)$を増加させる。

$$\frac{\mathrm{d}Q(t)}{\mathrm{d}t} = I(t)$$

•バネにつけたおもりの運動
質量m、速度v、バネ定数k、粘性抵抗係数ρ、外力f



$$m\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} = -kx - \rho v + f$$

$$m\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} + kx + \rho v = f$$

$$\frac{dx}{dt} = v$$

$$v \leftrightarrow I, \quad x \leftrightarrow Q, \quad m \leftrightarrow L, \quad k \leftrightarrow 1/C, \quad f \leftrightarrow \phi$$

の対応で、先程の微分方程式と同形

交流回路とおもりの運動は同様の現象が起こる。

複素インピーダンス

交流起電力が

$$V(t) = V_0 \cos(\omega t)$$

として、微分方程式を解く。電流$I(t)$、電荷$Q(t)$は、

$$I(t) = I_0 \cos(\omega t + \alpha)$$
$$Q(t) = Q_0 \cos(\omega t + \beta)$$

$\boxed{\begin{array}{l} \alpha, \beta: \text{位相} \\ V_0, I_0, Q_0: \text{振幅} \end{array}}$

として、微分方程式

$$\begin{cases} L\dfrac{\mathrm{d}I(t)}{\mathrm{d}t} + RI(t) + \dfrac{Q(t)}{C} = V(t) \\ \dfrac{\mathrm{d}Q(t)}{\mathrm{d}t} = I(t) \end{cases}$$

に代入すれば、解けるが、複雑。そこで・・・・・

オイラーの関係式 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ で、複素表示で解く。

$$\begin{cases} \hat{V}(t) = V_0 e^{i(\omega t)} \\ \hat{I}(t) = I_0 e^{i(\omega t + \alpha)} = I_0 e^{i\alpha} e^{i\omega t} \\ \hat{Q}(t) = Q_0 e^{i(\omega t + \beta)} = Q_0 e^{i\beta} e^{i\omega t} \end{cases}$$

これらの実部が物理的意味を持つ。複素数の微分方程式、

$$\begin{cases} L\dfrac{\mathrm{d}\hat{I}(t)}{\mathrm{d}t} + R\hat{I}(t) + \dfrac{\hat{Q}(t)}{C} = \hat{V}(t) \\ \dfrac{\mathrm{d}\hat{Q}(t)}{\mathrm{d}t} = \hat{I}(t) \end{cases}$$

の解の実部が求める解である。

$$\hat{I}(t) = \frac{\mathrm{d}\hat{Q}(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(Q_0 e^{i\beta} e^{i\omega t}\right) = i\omega Q_0 e^{i\beta} e^{i\omega t} = i\omega \hat{Q}(t)$$

代入

$$L\frac{\mathrm{d}\hat{I}(t)}{\mathrm{d}t} + R\hat{I}(t) + \frac{\hat{Q}(t)}{C} = \hat{V}(t)$$

$$Li\omega I_0 e^{i\alpha} \cancel{e^{i\omega t}} + RI_0 e^{i\alpha} \cancel{e^{i\omega t}} + \frac{1}{C}\frac{1}{i\omega} I_0 e^{i\alpha} \cancel{e^{i\omega t}} = V_0 \cancel{e^{i\omega t}}$$

$$\longrightarrow \left(i\omega L + R + \frac{1}{i\omega C}\right) I_0 e^{i\alpha} = V_0$$

$$\longrightarrow \hat{Z}\hat{I} = V_0 \qquad \hat{Z} = R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

交流回路 ←→ 直流回路

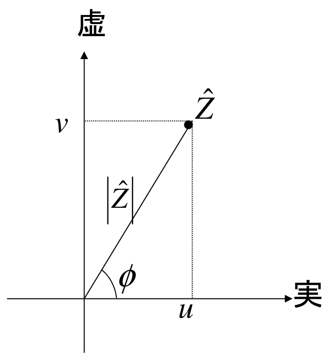
$$\boxed{\begin{array}{l} V_0 = \hat{Z}\hat{I} \\ \hat{Z} = R + i\left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right) \end{array}} \qquad V = RI$$

インピーダンス

複素平面

$$\left|\hat{Z}\right| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

$$\tan\phi = \frac{\omega L - 1/(\omega C)}{R}$$



インピーダンス　を絶対値と位相で表す。

$$\left|\hat{Z}\right|=\sqrt{R^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

$$\tan\phi=\frac{\omega L-1/(\omega C)}{R}$$

$$\longrightarrow\quad \boxed{\hat{Z}=\sqrt{R^2+(\omega L-1/(\omega C))^2}\,e^{i\phi}}$$

$\hat{I}=\dfrac{V_0}{\hat{Z}}$　に代入して

$$I_0e^{i\alpha}=\frac{V_0}{\sqrt{R^2+(\omega L-1/(\omega C))^2}\,e^{i\phi}}\quad\longrightarrow\quad\alpha=-\phi$$

$$I(t)=\mathrm{Re}[\hat{I}(t)]=\mathrm{Re}[I_0e^{i\alpha}e^{i\omega t}]=\mathrm{Re}[I_0e^{-i\phi}e^{i\omega t}]$$

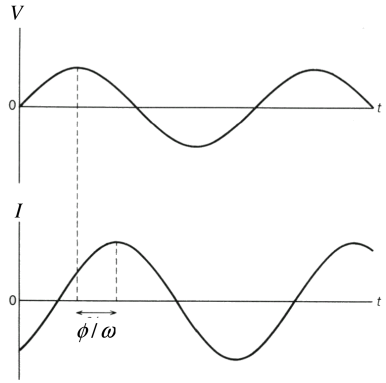
$$=\frac{V_0}{\sqrt{R^2+(\omega L-1/(\omega C))^2}}\cos(\omega t-\phi)$$

- $I(t)$は、起電力$V(t)$に比例せず位相φだけずれる。
- 振幅はωに依存する。

$\omega L-\dfrac{1}{\omega C}=0$ のとき、振幅最大。

$$\downarrow$$

$\boxed{\omega_0=\dfrac{1}{\sqrt{LC}}}$: 共鳴振動数



$$\hat{Q}(t)=Q_0e^{i\beta}e^{i\omega t}=\frac{\hat{I}(t)}{i\omega}=\frac{-i}{\omega}I_0e^{-\phi}e^{i\omega t}=\frac{I_0}{\omega}e^{-\frac{\pi}{2}i}e^{-\phi}e^{i\omega t}$$

$$Q(t)=\mathrm{Re}[\hat{Q}(t)]=\frac{V_0}{\omega\sqrt{R^2+(\omega L-1/(\omega C))^2}}\cos(\omega t-\phi-\frac{\pi}{2})$$

- Q(t)は、電流$I(t)$に対して位相が$\pi/2$ずれる。
- 振幅はωに依存する。

演習4.6

コンデンサーC、コイルL、抵抗Rを直列につなぎ、スイッチを開いてコンデンサーに電荷±Qを与える。スイッチを閉じたとき、回路に流れる電流の時間変化?