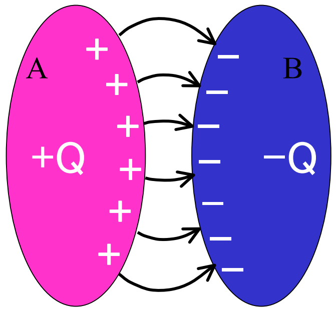
# 電磁気学I　11回目　§2.4　キャパシターと電気容量

## キャパシター（コンデンサー）とは？




ふたつの導体を近くに置き電荷をためられるようにしたもの。

±Qの電荷を与える。

電位差V＝$\phi_A - \phi_B \propto$ 電荷Q

比例係数C：電気容量

**Q＝CV**

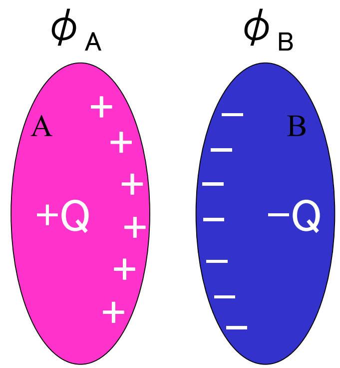
ABを離しておくにはエネルギーが必要

→静電気エネルギー　$E$=QV/2



## キャパシター（コンデンサー）

近接する2体の金属から構成された電荷を蓄積するための装置




$V$ :電位差

$$V = \phi_A - \phi_B$$

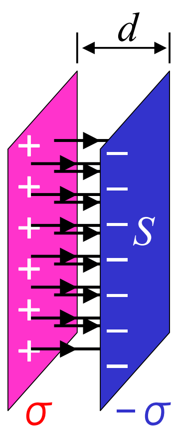
$C$ :電気容量

$$Q = CV$$

単位 : F (ファラッド)
$10^{-12}$ F
= 1 pF(ピコファラッド)



## 平行平板コンデンサー




電荷密度　$\sigma = Q/S$

電場(一定)　$E = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0} = \dfrac{Q}{\varepsilon_0 S}$

(§1.5　問2)

電位差

$$V = \int_0^d E ds = Ed = \frac{dQ}{\varepsilon_0 S}$$

電気容量　$C = \dfrac{\varepsilon_0 S}{d}$



## キャパシター（コンデンサー）の解き方

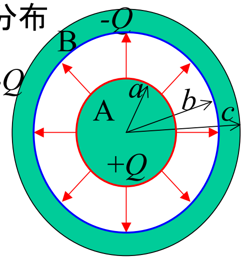
| | |
|---|---|
| 1. ±Q | 1. 二つの導体に±Qの電荷を与えたとして、電荷分布を考える。 |
| 2. 電場 | 2. 電場を求める。<br>・σから$\sigma = \varepsilon_0 E$を用いる。<br>・ガウスの法則<br>$\boxed{\varepsilon_0 \int_S E_n dS = \int_V \rho(\mathbf{r}) dV (= \text{閉曲面S内の総電荷})}$<br>を用いる。 |
| 3. 電位差 | 3. 二つの導体間の電位差を求める。 |
| 4. 電気容量 | 4. Q=CVの式から、電気容量Cを求める。 |

# 同心球コンデンサー

導体球Aに与えた電荷$+Q$は、Aの表面に分布

導体球殻BにはAの$+Q$に誘導された電荷$-Q$が内側の面に分布

導体球殻Bの全電荷量は$-Q$なので、Bの外側の面には電荷は無い




- $r<a$では導体中なので$E(r)=0$
- $a<r<b$では、ガウスの法則より

$$\varepsilon_0 \times 4\pi r^2 E(r) = Q \ \to\ E(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

電場は、間にのみ存在

- $b<r<c$では、導体中なので、 $E(r)=0$
- $r>c$では、ガウスの法則より

$$\varepsilon_0 \times 4\pi r^2 E(r) = Q + (-Q) = 0 \ \to\ E(r) = 0$$



AB間の電位差は

$$V = \int_a^b E(r)dr = \int_a^b \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)$$

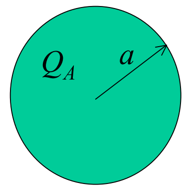
電気容量は

$$C = \frac{Q}{V} = 4\pi\varepsilon_0\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)^{-1}$$

孤立した導体球は$b\to\infty$として、

$$C_A = 4\pi\varepsilon_0 a$$

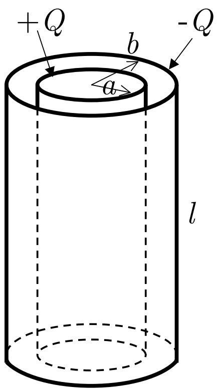
$$\phi_A = \frac{Q_A}{4\pi\varepsilon_0 a} \to Q_A = C_A\phi_A$$






半径$a,b$の同軸円筒導体(軸に沿って長さ$l$)を電極とするキャパシターの電気容量を求めよ。

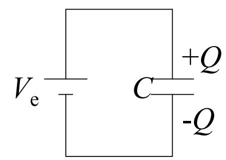
- 電荷密度を求める。
- ガウスの法則から電極間の電場を求める。
- 電場を積分して電位差を求める。
- $Q=CV$から電気容量を求める。



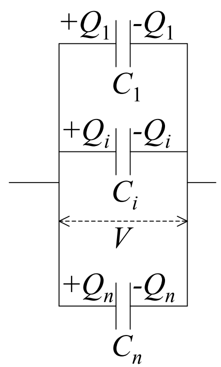



## コンデンサーの充電

$$Q = CV = CV_e$$




### 並列接続



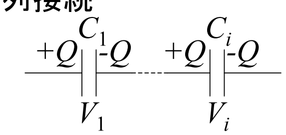

$$Q_i = C_i V_i = C_i V$$

$$Q = \sum_{i=1}^{n} Q_i = CV$$

$C$: 合成容量

$$\to C = \sum_{i=1}^{n} C_i$$

### 直列接続

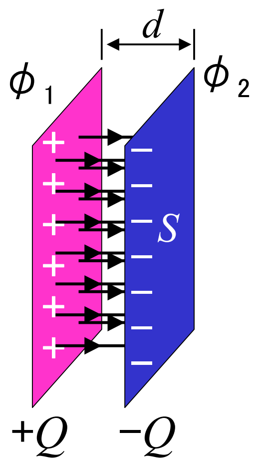



$$Q_i = C_i V_i = Q$$

$$V = \sum_{i=1}^{n} V_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{Q}{C_i} = \frac{Q}{C}$$

$$\to \frac{1}{C} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{C_i}$$

# コンデンサーの静電エネルギー




## 静電エネルギー

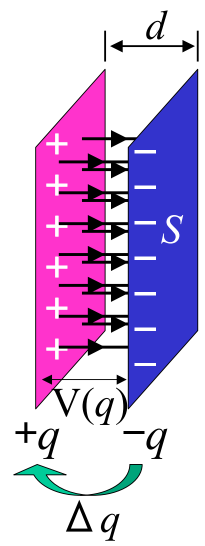
$$U=\frac{1}{2}\left(Q\phi_1-Q\phi_2\right)=\frac{1}{2}QV$$

$$U=\frac{1}{2}CV^2=\frac{1}{2C}Q^2$$



# コンデンサーの静電エネルギー

## 求め方




極板に±$q$の電荷があり、電位差が$V(q)$だとする。
このとき、電気容量を$C$とすると、

$$V(q)=\frac{q}{C}$$

この状況で、−$q$から+$q$へΔ$q$だけ電荷を移動。その
エネルギーΔ$U$は、

$$\Delta U=V(q)\Delta q=\frac{q}{C}\Delta q$$

これを、$q$=0〜$Q$まで、行うと、コンデンサーが持っている
エネルギーが求まる。

$$U=\int_{q=0}^{q=Q}dU=\int_0^Q\frac{q}{C}dq=\frac{Q^2}{2C}$$