電磁気学I　10回目　§2.3　静電誘導の例　（鏡像法）

導体内に電場があると・・・
⇒　電荷が移動する　誘導電荷
⇒　外部電場を打ち消す新たな電場が発生　誘導電場
⇒導体内の電場がゼロになる。

導体がある場合の電場の特徴

①導体内部に電場はない
②電荷は導体表面のみ、内部にはない
③導体表面では電場は面に垂直
④導体表面は等電位面

導体内→　電場なし　OK!
導体外→　外部電場＋誘導電荷の作る電場

どうやって求める？⇒　鏡像法

鏡像法とは？　導体外の電場、電位を求めるための一方法

導体外の電場を求めるために、
仮想的に導体内に電荷（鏡像電荷）をおき、
外部電荷による電位＋鏡像電荷による電位＝ $\phi(r)$が
導体表面で一定になるようにする。

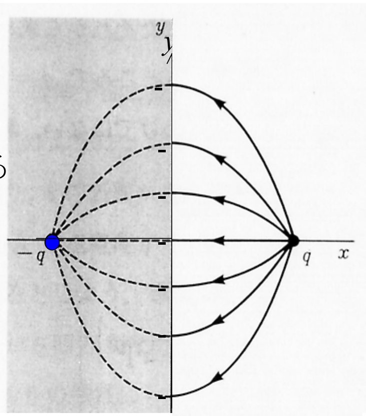
鏡像電荷の大きさ、位置をいい塩梅に決める。

導体外で
電場 $E=-\nabla\phi$がガウスの法則、うずなしの法則を満たし、
(点電荷のつくる電場をクーロンの法則で計算すれば当然満たす。)
また、導体表面で等電位であるような $\phi(r)$は
一つしかないことがわかっている。
⇒よって、求まった電位 $\phi(r)$は正しい電位である。

鏡像電荷は、誘導電荷を点電荷で置き換えたものに対応。

静電誘導の例：鏡像法

例1. 導体平面と点電荷



$x=d$の点電荷 qが作る電場により、
導体表面 $(x=0)$に誘導電荷が現れる

→ 導体内部の電場はゼロ
→ 導体内部の電位は一定

$x=0$で ϕが一定$(=0)$になるように考える。

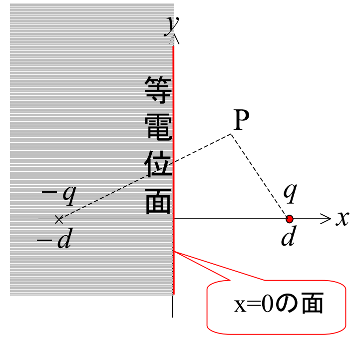
→ $x=-d$に$-q$の電荷を「仮想的に」おいた場合を考える。

点P(x,y,z)での電位 ϕ

$$\phi(x,y,z)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{(x-d)^2+y^2+z^2}}+\frac{-q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{(x+d)^2+y^2+z^2}}$$

$$\phi(x=0,y,z)=0$$

確かに等電位面になっている。



$$\vec{E}=-grad\phi=-\nabla\phi=\left(-\frac{\partial\phi}{\partial x},-\frac{\partial\phi}{\partial y},-\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)$$

$$E_x=-\frac{\partial\phi}{\partial x}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{x-d}{\{(x-d)^2+y^2+z^2\}^{3/2}}-\frac{x+d}{\{(x+d)^2+y^2+z^2\}^{3/2}}\right]$$

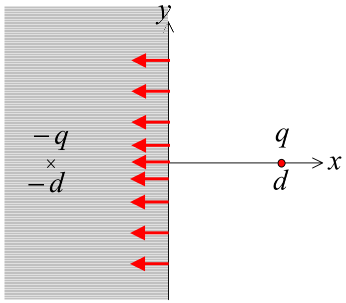
$$E_y=-\frac{\partial\phi}{\partial y}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{y}{\{(x-d)^2+y^2+z^2\}^{3/2}}-\frac{y}{\{(x+d)^2+y^2+z^2\}^{3/2}}\right]$$

$$E_z=-\frac{\partial\phi}{\partial z}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{z}{\{(x-d)^2+y^2+z^2\}^{3/2}}-\frac{z}{\{(x+d)^2+y^2+z^2\}^{3/2}}\right]$$

誘導電荷は、x=0での電場から求められる。← $\sigma = \varepsilon_0 \boldsymbol{E}$

$$E_x = -\frac{qd}{2\pi\varepsilon_0 \left\{d^2 + y^2 + z^2\right\}^{3/2}}$$

$$E_y = E_z = 0$$



$\sigma = \varepsilon_0 E$ より、

$$\sigma(y,z) = -\frac{qd}{2\pi\left\{d^2 + y^2 + z^2\right\}^{3/2}}$$

⟶ y-z平面でσを積分すると-q

電荷qに働く力

電荷qと(鏡像)電荷(-q)の間に働く力
=誘導電荷作る電場からqに働く力

導体の静電誘導の問題を鏡像法によって解くときの手順

1. 鏡像電荷　1. 導体表面を等電位面にするように、鏡像電荷の大きさ、位置を決める。

2. 電位　2. 外部電荷による電位(あるいは外部電場に対する電位)+鏡像電荷による電位。

3. 電場　3. 電位を微分して電場を求める。

$\boldsymbol{E} = -\nabla\phi$

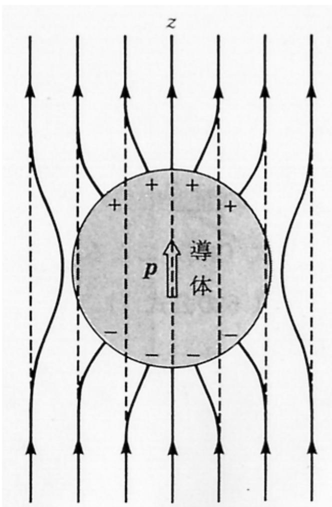
4. 誘導電荷　4. 導体表面での電場の法線成分(電場の大きさそのもの)を求め、誘電電荷を求める。

$\sigma = \varepsilon_0 \boldsymbol{E}$

例2. 一様な電場中の導体球(半径R)

一様な外部電場
$E_e = E_z$
E_eによる電位は、
$$\phi_e = -E_e z$$

導体球面上でφ=一定
→ $r=R$ で $\phi=0$ となるようにする



原点に仮想的に電気双極子pを置く。
双極子が作る電位ϕ_pは

$$\phi_p = \frac{pz}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

全電位は

$$\phi = \phi_e + \phi_p = -E_e z + \frac{pz}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

$r=R$ のとき、

$$\phi(r=R) = -E_e z + \frac{pz}{4\pi\varepsilon_0 R^3} = 0$$

$$\longrightarrow p = 4\pi\varepsilon_0 R^3 E_e$$

電位は

$$\phi = -E_e z + \frac{R^3 E_e z}{r^3} = \left(\frac{R^3}{r^3} - 1\right) E_e z$$

問3　$r>R$で電場$\boldsymbol{E}$を計算せよ。 p49

$$\phi = -E_e z + \frac{R^3 E_e z}{r^3} = \left(\frac{R^3}{r^3} - 1\right) E_e z$$

$$E_x = -\frac{\partial \phi}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{R^3 E_e z}{r^3}\right) = -R^3 E_e z \frac{\partial}{\partial x}\left(r^{-3}\right) = -R^3 E_e z(-3) r^{-4} \frac{\partial r}{\partial x}$$

$$= 3R^3 E_e z r^{-4} \frac{x}{r} = 3R^3 E_e \frac{zx}{r^5}$$

同様にして、

$$E_y = -\frac{\partial \phi}{\partial y} = 3R^3 E_e \frac{zy}{r^5}$$

$$E_z = -\frac{\partial \phi}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial z}\left(-E_e z\right) - R^3 E_e \frac{\partial}{\partial z}\left(z r^{-3}\right) = E_e - R^3 E_e \left(r^{-3} + z \frac{\partial}{\partial z}\left(r^{-3}\right)\right)$$

$$= E_e - R^3 E_e \left(r^{-3} + z \frac{\partial}{\partial z}\left(r^{-3}\right)\right) = E_e - R^3 E_e \left(\frac{1}{r^3} - 3\frac{z^2}{r^5}\right)$$

以上より、$\boldsymbol{E} = 3R^3 E_e \frac{z}{r^5}(x, y, z) + \left(0, 0, E_e - R^3 E_e \frac{1}{r^3}\right)$

問4　球面上に誘導された電荷面密度σを求めよ。 p49

$$\boldsymbol{E} = 3R^3 E_e \frac{z}{r^5}(x, y, z) + \left(0, 0, E_e - R^3 E_e \frac{1}{r^3}\right)$$

$$= 3R^3 E_e \frac{z}{r^5} \boldsymbol{r} + \left(0, 0, E_e - R^3 E_e \frac{1}{r^3}\right)$$

球面上の点の座標は,極座標表示で$\boldsymbol{r} = \left(R\sin\vartheta\cos\varphi, R\sin\vartheta\sin\varphi, R\cos\theta\right)$

この点における面の法線ベクトルは$\boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{r}}{R}$

面上における電場ベクトルは

$$\boldsymbol{E} = 3R^3 E_e \frac{R\cos\theta}{R^5} \boldsymbol{r} + \left(0, 0, E_e - R^3 E_e \frac{1}{R^3}\right) = 3E_e \frac{\cos\theta}{R} \boldsymbol{r}$$

よって、$E_n = \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{n} = 3E_e \frac{\cos\theta}{R} \boldsymbol{r} \cdot \frac{\boldsymbol{r}}{R} = 3E_e \cos\theta \frac{R^2}{R^2} = 3E_e \cos\theta$

（あるいは$E_n = \left|\boldsymbol{E}\right| = 3E_e \frac{R\cos\theta}{R} R = 3E_e \cos\theta$）

$\sigma = \varepsilon_0 E_n = 3\varepsilon_0 E_e \cos\theta$

球面座標