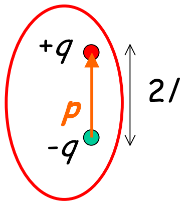
電磁気学I　8回目　§1.7　電気双極子

電気双極子とは・・・

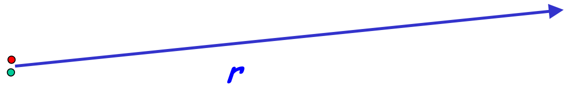


双極子モーメント：p

$p=2ql$

なぜそんなものを定義するか、というと・・・

正負の電荷が近くにあるとき、ふたつをまとめてそう呼ぶ。



遠く離れた点rでの
- 電位
- 一様な電場中で受ける力

などの表示に便利。

電荷の分布を遠くから見たとき
- 総電荷がゼロでないとき・・・点電荷
- ±の電荷分布の中心にずれがあるとき・・・電気双極子

に見える

電磁気学I　6,7回目　§1.6　電位　の復習

電位 ϕ の定義

ある点に点電荷qをおいたときの位置エネルギーU

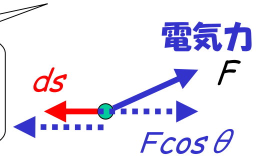
$$U=q\phi$$

$$U=q\phi=\int -\mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}=\int -q\mathbf{E}\cdot d\mathbf{s}$$

$$\Rightarrow \boxed{\phi=-\int \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s}}$$

基準点からその点までもってくる間にされた仕事

電気力にさからう力のする仕事

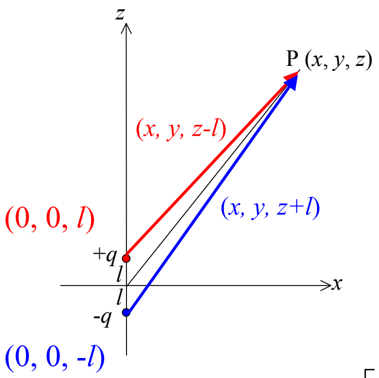


電位：電場の積分 $\boxed{\phi_B=-\int_{S(C)}^{B}\mathbf{E}\cdot d\mathbf{s}}$　点電荷q_0の電位 $\phi(r)=\dfrac{q_0}{4\pi\varepsilon_0 r}$

電場：電位の微分 $\mathbf{E}=-\nabla\phi=\left(-\dfrac{\partial\phi}{\partial x},-\dfrac{\partial\phi}{\partial y},-\dfrac{\partial\phi}{\partial z}\right)$

電気双極子の作る電位

短い間隔をおいて並ぶ大きさの等しい電荷の対



$+q$が点Pに作る電位: ϕ_+

$$\phi_+=\frac{+q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{x^2+y^2+(z-l)^2}}$$

$-q$が点Pに作る電位: ϕ_-

$$\phi_-=\frac{-q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{x^2+y^2+(z+l)^2}}$$

+)

$$\phi=\phi_++\phi_-=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-l)^2}}-\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z+l)^2}}\right]$$

電荷から十分離れた点Pでは、 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}>>l$

$$\left[x^2+y^2+(z\pm l)^2\right]^{-1/2}\cong\left[x^2+y^2+z^2\pm 2zl\right]^{-1/2}$$ ←l^2を無視

$$=\left[r^2(1\pm\frac{2zl}{r^2})\right]^{-1/2}$$

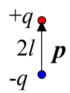
$$\cong r^{-1}\left[1\mp\frac{zl}{r^2}\right]$$ ←テーラ展開

$$\phi=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-l)^2}}-\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z+l)^2}}\right]$$

$$=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}\left[\left(1+\frac{zl}{r^2}\right)-\left(1-\frac{zl}{r^2}\right)\right]$$

$$=\frac{2lqz}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

$$=\frac{pz}{4\pi\varepsilon_0 r^3}=\frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\quad \because \mathbf{p}=(0,0,p)$$



電気双極子モーメント
$p=2ql$

テーラ展開

$$\boxed{f(a+\delta)=f(a)+f'(a)\delta}+\frac{1}{2!}f''(a)\delta^2+\cdots$$

微小量

$$1>>\delta \text{ の時}$$

$$(1\pm\delta)^{\alpha}\cong 1\pm\alpha\delta$$

証明） $f(x)=x^{\alpha}$とおく。$f'(x)=\alpha\, x^{\alpha-1}$ ⇒ $f'(a)=\alpha\, a^{\alpha-1}$

一次までのテーラー展開より

$f(a+\delta)=f(a)+f'(a)\delta=a^{\alpha}+\alpha\, a^{\alpha-1}\delta$

$a=1$として、$f(1\pm\delta)=(1\pm\delta)^{\alpha}=1\pm\alpha\delta$

電気双極子が作る電場

$$\mathbf{E}=-grad\phi=-\nabla\phi=\left(-\frac{\partial\phi}{\partial x},-\frac{\partial\phi}{\partial y},-\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)$$

$$E_x=-\frac{\partial\phi}{\partial x}=-\frac{pz}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r^3}\right)=-\frac{pz}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r^3}\right)$$

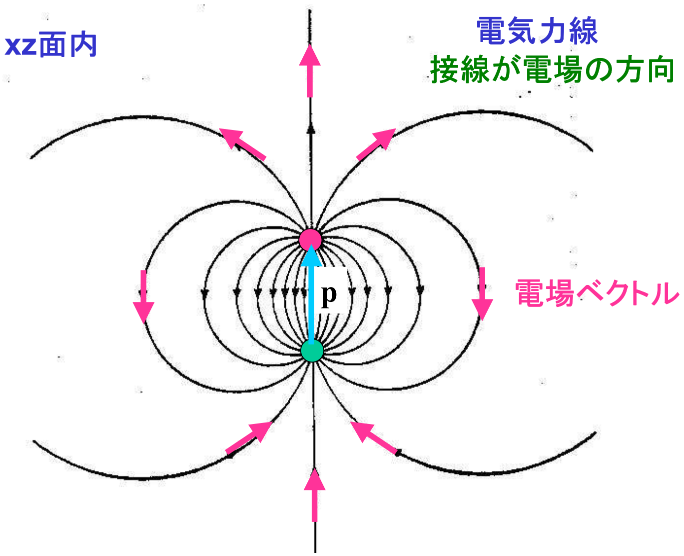
$$=\frac{3pxz}{4\pi\varepsilon_0 r^5}$$

$$E_y=-\frac{\partial\phi}{\partial y}=\frac{3pyz}{4\pi\varepsilon_0 r^5}$$

(fg)'=f'g+f g'

$$E_z=-\frac{\partial\phi}{\partial z}=-\frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{r^3}\right)=\frac{3pz^2}{4\pi\varepsilon_0 r^5}-\frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

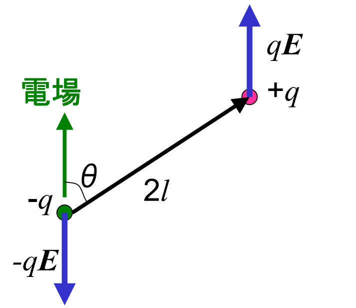
電気双極子がつくる電場



電気双極子が一様な電場の中にある場合に働く力

力のモーメント: N= $2lqE\sin\theta$

N=$\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{E}$



一様な電場Eの中での電位

$$\phi=-Ez$$

双極子モーメント: $p=q(2l)$

双極子がもつエネルギーは

$$U=(+q)(-El\cos\theta)+(-q)(-E)(-l\cos\theta)$$

$$=-2qlE\cos\theta$$

$$=-\mathbf{p}\cdot\mathbf{E}$$