静電ポテンシャル ϕ の定義式

$$\boxed{\phi_B = -\int_{S(C)}^{B} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s}}$$

A=S点をϕ=0の基準点とする点Bでの電位

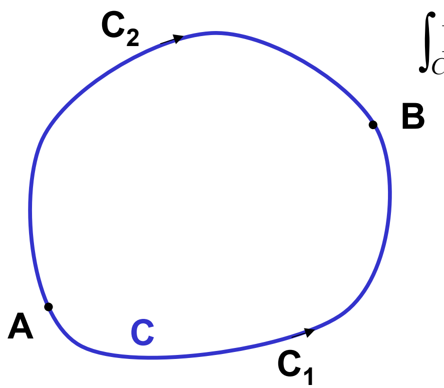
点電荷qを点Bにおくと、その場所での

位置エネルギーUがqϕとなる

静電場の満たす法則II：渦なしの法則

AからBに向かう経路C_1とC_2

$$\int_{C_1} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} = \int_{C_2} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s}$$



経路がループの場合

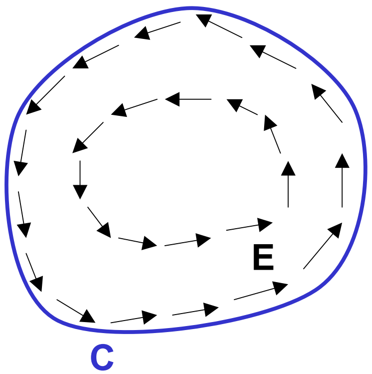
$$\int_{C} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} = \int_{C_1} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} - \int_{C_2} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} = 0$$

↓

$$\boxed{\oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} = 0}$$

渦無しの法則

もし、電場に渦があったら・・・・・



$\boxed{\oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} = 0}$ とはならない！

↓

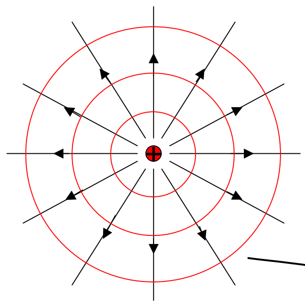
静電場では、電場に渦は無い！

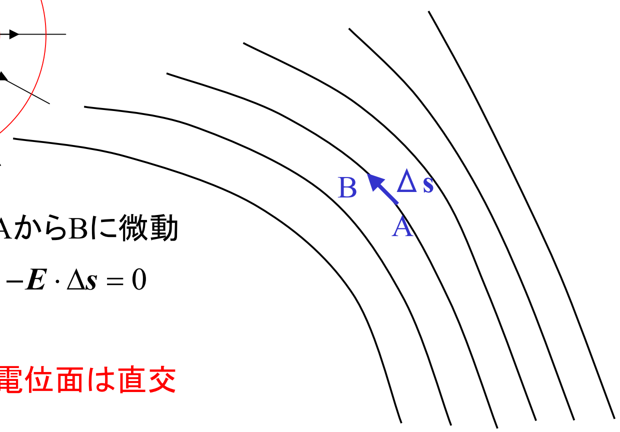
ガウスの法則
＋
渦なしの法則

クーロンの法則

電位から電場を求める

電位が一定の場所 → 等電位面





等電位面上のAからBに微動

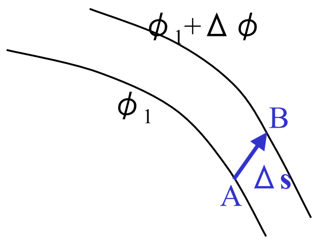
$$\Delta\phi = \phi_B - \phi_A = -\boldsymbol{E}\cdot\Delta\boldsymbol{s} = 0$$

↓

電場Eと等電位面は直交

点A $\xrightarrow{\Delta \mathbf{s}}$ 点B

$\phi_1 \longrightarrow \phi_1 + \Delta\phi$



$$\phi_B - \phi_A = (\phi_1 + \Delta\phi) - \phi_1$$
$$= \Delta\phi = -\boldsymbol{E} \cdot \Delta\boldsymbol{s}$$
$$= -E_x \Delta x - E_y \Delta y - E_z \Delta z$$

E_xを求めるには、$\Delta y = \Delta z = 0$として、

$$E_x = -\frac{\Delta\phi}{\Delta x} = -\frac{\phi(x+\Delta x, y, z) - \phi(x, y, z)}{\Delta x}$$
$$= -\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\phi(x+\Delta x, y, z) - \phi(x, y, z)}{\Delta x} = -\frac{\partial \phi(x, y, z)}{\partial x}$$

同様に
$$E_y = -\frac{\partial \phi(x, y, z)}{\partial y}, \quad E_z = -\frac{\partial \phi(x, y, z)}{\partial z}$$

微分演算子

$$\nabla \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$ ナブラ

$$\phi = \phi(x, y, z)$$

$$\nabla \phi = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \phi = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}, \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)$$

静電ポテンシャル ϕ と電場 E との関係

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi = -\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \phi = \left(-\frac{\partial \phi}{\partial x}, -\frac{\partial \phi}{\partial y}, -\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)$$
$$= \text{-grad } \phi$$

いろいろな静電ポテンシャル ϕ に対する電場 E

$$\boldsymbol{E} = -\nabla \phi = -\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \phi = \left(-\frac{\partial \phi}{\partial x}, -\frac{\partial \phi}{\partial y}, -\frac{\partial \phi}{\partial z} \right) = \text{-grad } \phi$$

$\phi = Ax$の場合：

$$E_x = -\frac{\partial}{\partial x}\phi = -A\frac{\partial}{\partial x}x = -A, \quad E_y = -\frac{\partial}{\partial y}\phi = 0, \quad E_z = -\frac{\partial}{\partial z}\phi = 0$$

$$\boldsymbol{E} = (-A, 0, 0)$$

$\phi = \dfrac{A}{r}$の場合：

$$\frac{\partial}{\partial x}(f(x))^n = n(f(x))^{n-1}\frac{\partial f(x)}{\partial x}$$

$$E_x = -\frac{\partial}{\partial x}\phi = -A\frac{\partial}{\partial x}r^{-1} = -A \times (-1) r^{-2}\frac{\partial r}{\partial x} = Ar^{-2}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{1/2}$$
$$= \frac{1}{2}Ar^{-2}\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{-1/2}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 + y^2 + z^2\right) = \frac{1}{2}Ar^{-3} \times 2x = A\frac{x}{r^3}$$

同様にして、$E_y = A\dfrac{y}{r^3}, E_z = A\dfrac{z}{r^3}$ $\quad \boldsymbol{E} = \left(A\dfrac{x}{r^3}, \quad A\dfrac{y}{r^3}, \quad A\dfrac{z}{r^3} \right)$

教科書p30問8もやりましょう。