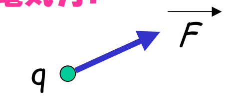
電磁気学I　6回目　§1.6　電位

電場Eの定義

ある点に点電荷qをおいたときに働く電気力$\vec{F}$

$$\vec{F} = q\vec{E}$$



電位φの定義

ある点に点電荷qをおいたときの位置エネルギーU

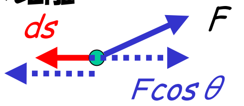
$$U = q\phi$$

基準点からその点までもってくる間にされた仕事

$$U = q\phi$$
$$= \int -\vec{F}\cdot d\vec{s}$$
$$= \int -q\vec{E}\cdot d\vec{s}$$
$$\Rightarrow \phi = -\int \vec{E}\cdot d\vec{s}$$

力×距離

電気力にさからう力



電位：電場の積分

逆に　電場：電位の微分

電場の中の電荷の運動

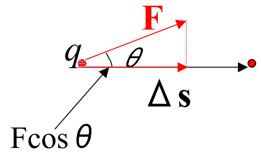
電場Eの中で、電荷qがΔsだけ動いたとき電場のする仕事

＝−(外力のする仕事)

電荷qに働く力：$\mathbf{F} = q\mathbf{E}$

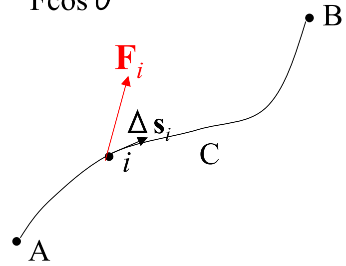
Δsでの仕事：ΔW

$$\Delta W = F\cos\theta\Delta s = q\mathbf{E}\cdot\Delta\mathbf{s}$$



i番目の区間Δs_iでの仕事

$$\Delta W_i = q\mathbf{E}_i\cdot\Delta\mathbf{s}_i$$

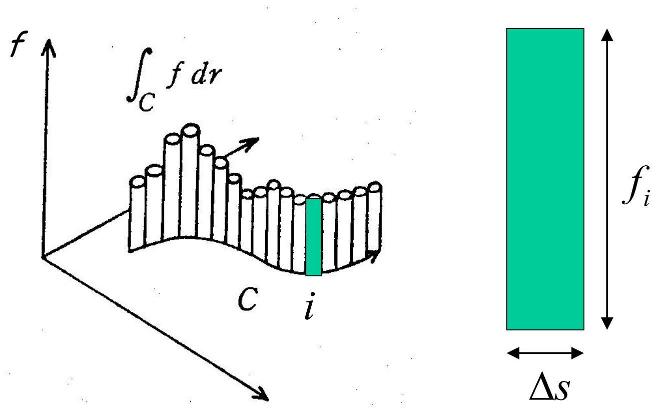


A点からB点までの全仕事

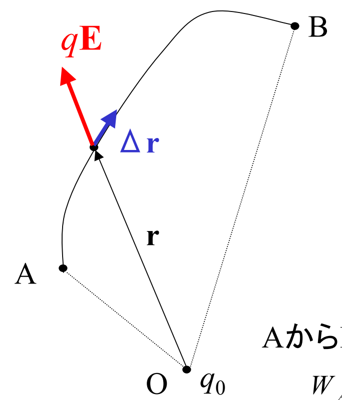
$$W_{AB} = q\sum_{i=1}^{n}\mathbf{E}_i\cdot\Delta\mathbf{s}_i$$
$$= q\int_{A(C)}^{B}\mathbf{E}\cdot d\mathbf{s}$$

曲線C上の線積分

線積分は壁の面積！



原点にある電荷q_0が作る電場について、電場のする仕事Wを求める。



rの位置での電場は　$\mathbf{E} = \dfrac{q_0}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\mathbf{r}}{r^3}$

ここでの微小変位$\Delta\mathbf{r}$の仕事ΔWは

$$\Delta W = q\mathbf{E}\cdot\Delta\mathbf{r} = \frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathbf{r}\cdot\Delta\mathbf{r}}{r^3}$$

$$\mathbf{r}\cdot\Delta\mathbf{r} = (x,y,z)\cdot(\Delta x,\Delta y,\Delta z)$$
$$= x\Delta x + y\Delta y + z\Delta z = r\Delta r$$

$r^2=x^2+y^2+z^2$なので

AからBまでの仕事W_{AB}は

$$W_{AB} = \frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0}\int_A^B\frac{\mathbf{r}\cdot\Delta\mathbf{r}}{r^3} = \frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0}\int_A^B\frac{dr}{r^2}$$

$$= \frac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{r_B} - \left(-\frac{1}{r_A}\right)\right] = U_A - U_B$$

仕事はr_A、r_Bのみで決まる
経路は関係なし!!

$U_{A,B} = \dfrac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{r_{A,B}}$　とおく。

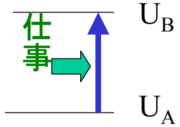
一般の電場の場合も

AからBまでの電場のする仕事W_{AB}は

$$\boxed{W_{AB} = q\int_A^B \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{s} = U_A - U_B}$$

→ 仕事W_{AB}はAとBの位置だけで決まり経路によらない。
→「クーロン力は保存力」
→ 位置エネルギーが定義できる

$$\boxed{\text{外力のする仕事}\quad W'_{AB} = -q\int_A^B \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{s} = U_B - U_A}$$



仕事＝(仕事をされた後の位置エネルギー)
ー(仕事される前の位置エネルギー)

$U_A = U(r_A)$:電荷qのr_Aでの位置エネルギー
（力のポテンシャル）

$U_{A,B} = q\phi_{A,B}$ とおいて静電ポテンシャル (電位) ϕを定義する。

$$\boxed{\frac{1}{q}(U_B - U_A) = \phi_B - \phi_A == -\int_{A(C)}^B \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{s}}$$

A=S点をϕ=0の基準点とすると点Bでの電位は

$$\boxed{\phi_B = -\int_{S(C)}^B \mathbf{E}\cdot d\boldsymbol{s}}$$

基準点S→点B
電場を線積分し
マイナスをつける。

静電ポテンシャル ϕの定義式

点電荷qをおくと、その場所での
位置エネルギーUがqϕとなる。

原点にある点電荷q_0のつくる電場の位置rでの電位は
基準点Sを無限遠方に取り、

$$\phi(r) = -\frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\text{無限遠}}^{\text{電荷から距離 }r\text{の点}} \frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\cdot d\boldsymbol{r} = \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\text{電荷から距離 }r\text{の点}}^{\text{無限遠}} \frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\cdot d\boldsymbol{r}$$

$$\Rightarrow \int_r^\infty \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr = \boxed{\frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0 r}}$$

電位の単位:ボルト[V]=[Nm/C=J/C]

$U_A = q\phi_A$:電位ϕ_Aの所にある電荷qのポテンシャルエネルギー
(静電エネルギー)

問: z方向を向いた一様な電場**E**=(0,0,-E)がある。z=0を基準点とした
電位を求めよ。このとき、電荷qに働く力と位置エネルギーは?

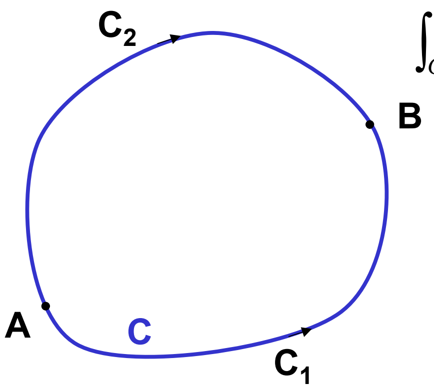
比較:高さhの位置にある質量mにかかる力と位置エネルギー

→宿題　ヒント: 力＝電荷×電場
位置エネルギー＝電荷×電位

静電場の満たす法則II：渦なしの法則

AからBに向かう経路C_1とC_2

$$\int_{C_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \int_{C_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$$



経路がループの場合

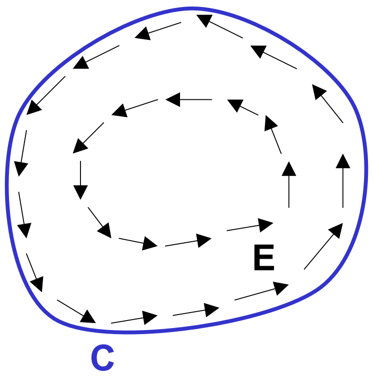
$$\int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \int_{C_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} - \int_{C_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 0$$

↓

$$\boxed{\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 0}$$

渦無しの法則

もし、電場に渦があったら・・・・・



$\boxed{\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 0}$ とはならない！

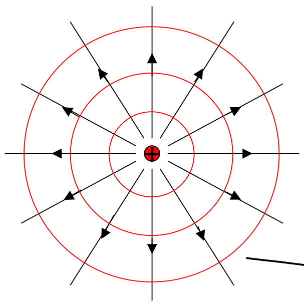
↓

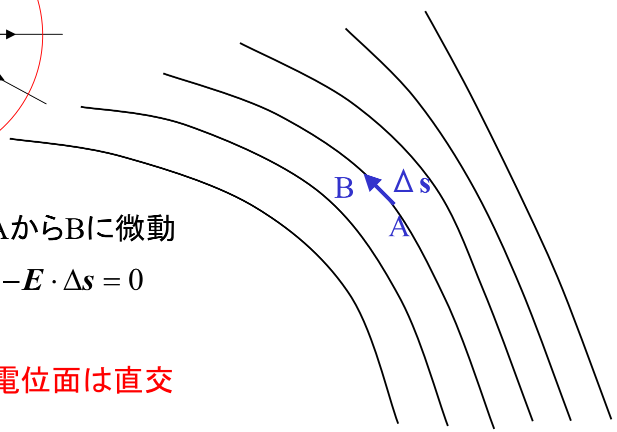
静電場では、電場に渦は無い！

ガウスの法則
＋
渦なしの法則 ⇔ クーロンの法則

電位から電場を求める

電位が一定の場所 → 等電位面





等電位面上のAからBに微動

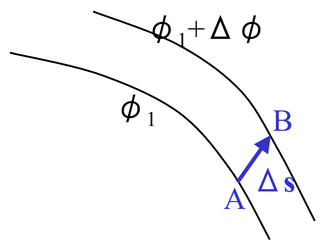
$$\Delta\phi = \phi_B - \phi_A = -\boldsymbol{E} \cdot \Delta\boldsymbol{s} = 0$$

↓

電場Eと等電位面は直交

$$\text{点A} \xrightarrow{\Delta \mathbf{s}} \text{点B}$$

$$\phi_1 \longrightarrow \phi_1 + \Delta\phi$$



$$\begin{aligned}\phi_B - \phi_A &= (\phi_1 + \Delta\phi) - \phi_1 \\ &= \Delta\phi = -\boldsymbol{E} \cdot \Delta\boldsymbol{s} \\ &= -E_x \Delta x - E_y \Delta y - E_z \Delta z\end{aligned}$$

E_xを求めるには、$\Delta y = \Delta z = 0$として、

$$\begin{aligned}E_x &= -\frac{\Delta\phi}{\Delta x} = -\frac{\phi(x+\Delta x, y, z) - \phi(x, y, z)}{\Delta x} \\ &= -\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\phi(x+\Delta x, y, z) - \phi(x, y, z)}{\Delta x} = -\frac{\partial \phi(x, y, z)}{\partial x}\end{aligned}$$

同様に

$$E_y = -\frac{\partial \phi(x, y, z)}{\partial y}, \quad E_z = -\frac{\partial \phi(x, y, z)}{\partial z}$$

微分演算子

$$\nabla \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \qquad \text{ナブラ}$$

$$\phi = \phi(x, y, z)$$

$$\nabla \phi = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \phi = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}, \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)$$

静電ポテンシャル ϕ と電場 E との関係

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi = -\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \phi = \left(-\frac{\partial \phi}{\partial x}, -\frac{\partial \phi}{\partial y}, -\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)$$

$$= \text{-grad } \phi$$

いろいろな静電ポテンシャル ϕ に対する電場 E

$$\boldsymbol{E} = -\nabla \phi = -\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \phi = \left(-\frac{\partial \phi}{\partial x}, -\frac{\partial \phi}{\partial y}, -\frac{\partial \phi}{\partial z} \right) = \text{-grad } \phi$$

$\phi = Ax$の場合：

$$E_x = -\frac{\partial}{\partial x}\phi = -A\frac{\partial}{\partial x}x = -A, \quad E_y = -\frac{\partial}{\partial y}\phi = 0, \quad E_z = -\frac{\partial}{\partial z}\phi = 0$$

$$\boldsymbol{E} = (-A, 0, 0)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(f(x))^n = n(f(x))^{n-1}\frac{\partial f(x)}{\partial x}$$

$\phi = \dfrac{A}{r}$の場合:

$$E_x = -\frac{\partial}{\partial x}\phi = -A\frac{\partial}{\partial x}r^{-1} = -A \times (-1) r^{-2}\frac{\partial r}{\partial x} = Ar^{-2}\frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2+z^2)^{1/2}$$

$$= \frac{1}{2}Ar^{-2}(x^2+y^2+z^2)^{-1/2}\frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2+z^2) = \frac{1}{2}Ar^{-3} \times 2x = A\frac{x}{r^3}$$

同様にして、$E_y = A\dfrac{y}{r^3}, E_z = A\dfrac{z}{r^3}$ $\qquad \boldsymbol{E} = \left(A\dfrac{x}{r^3}, \ A\dfrac{y}{r^3}, \ A\dfrac{z}{r^3} \right)$

教科書p30問8もやりましょう。