電磁気学I　5回目　§1.5　ガウスの法則を応用した電場計算

電場の従う法則

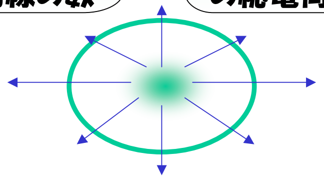
↓

ガウスの法則

$$\varepsilon_0 \int_S E_n dS = \int_V \rho(\mathbf{r}) dV$$

左辺
閉曲面Sを貫く
電気力線の数

右辺
閉曲面S内
の総電荷



使い方

1. 電場の様子を考える。
（電気力線を描く）。
2. 適当な閉曲面Sをとる。
（計算しやすいように→
電場と面を垂直か平行に、
閉曲面上で電場を一定に ）
3. ガウスの法則の左辺、右辺を
計算。

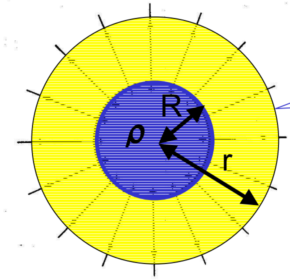
左辺＝右辺→電場を求める。

電場×ある量　　電荷

kE=q → E=q/k

ガウスの法則 $\varepsilon_0 \int_{(S)} E_n(\mathbf{r}) dS = S$内の総電荷

(a) 球対称電荷　半径Rの球内に一様に分布した電荷



1. 電場の様子を考える。

電場は放射状
大きさは中心からの距離rにのみ依存

2. 適当な閉曲面Sをとる。

S: 半径rの球面

球面S上で$\mathbf{E}(\mathbf{r})$は一定の大きさで
面に垂直→ $E_n(r) = E(r)$

3. ガウスの法則の左辺、右辺を計算。

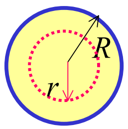
$$(\text{左辺}) = \varepsilon_0 \times \text{半径}r\text{の球の面積} \times E(r) = \varepsilon_0 4\pi r^2 E(r)$$

$$(\text{右辺}) = S\text{内の総電荷} = Q(r) \longrightarrow E(r) = \frac{Q(r)}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

右辺の計算の続き

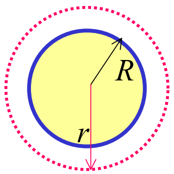
球内の電荷密度をρとすると

$r \le R$の場合 ⟶



$$Q(r) = \rho \times (\text{半径}r\text{の球の体積}) = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$$

$r > R$の場合 ⟶



$$Q(r) = \rho \times (\text{半径}R\text{の球の体積}) = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$$

$$E(r) = \frac{Q(r)}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \longrightarrow E(r) = \begin{cases} \dfrac{\rho r}{3\varepsilon_0} & (r \le R) \\ \dfrac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2} & (r > R) \end{cases}$$

右辺の計算の仕方の例

問い

半径aの球内に全体でqの電荷が一様に分布している。

半径rの球面を考えたときその内部にある電荷の量を
求めよ。（r＞aのときとr<aのときに分けよ。）

答え

・r＞aのとき、電荷はすべて球面内にあるので、q
・r＜aのときは球内の電荷密度を考える。

半径aの球の体積は $\frac{4}{3}\pi a^3$ なので、電荷密度ρは $\rho = q \Big/ \left(\frac{4}{3}\pi a^3\right)$

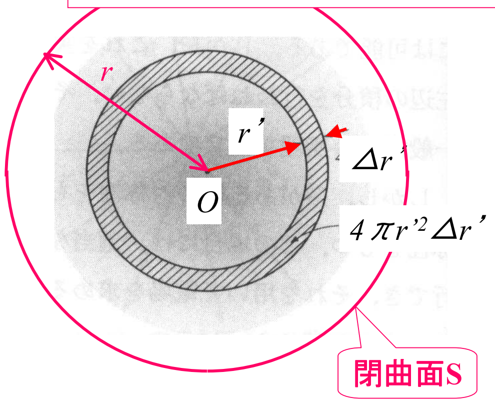
よって、電荷量は $\rho \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{q}{\frac{4}{3}\pi a^3} \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{q}{a^3} r^3$

球対称な電荷分布に対する一般的な右辺の計算の仕方

電荷の分布が球対称であるが、一様ではない場合

→電荷密度 ρ が距離 r の関数　$\rho(r)$

半径 r の閉曲面S内の総電荷はどのように求めるか？



玉葱状に薄い球殻(皮)に分ける。

半径r'、厚みΔr'の球殻
球殻内の電荷密度→ρ(r')
球殻の体積→4πr'²Δr'
⇒球殻内の総電荷
＝ρ(r') 4πr'²Δr'

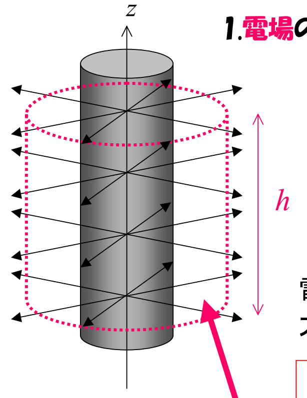
閉曲面内の球殻の電荷を足す。

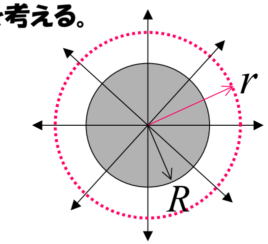
$$Q(r)=\int_0^r 4\pi r'^2\rho(r')dr'$$

(b) 軸対称電荷

無限に長い円柱に一様に分布した電荷のつくる電場

1.電場の様子を考える。





電場は z 軸に垂直で xy 面内の方向について一様
大きさは、中心からの距離 r にのみ依存

$$\varepsilon_0\int_{(S)}E_n(\mathbf{r})dS = S\text{内の総電荷}$$

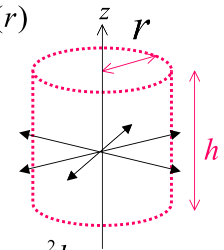
2. 適当な閉曲面Sをとる。

閉曲面 S:半径 r、高さ h の円筒=上面+下面+側面

3. ガウスの法則の左辺、右辺を計算。

電場は z 軸に対して垂直⇒面積分のうち、上面、下面の項はゼロ

$$(\text{左辺}) = \varepsilon_0\times\text{半径}r\text{の円筒の側面の面積}\times E(r)$$
$$= \varepsilon_0 2\pi r h E(r)$$
$$(\text{右辺}) = S\text{内の総電荷} = Q(r,h)$$



円柱内の電荷密度を ρ とすると

$r\le R$ の場合

$$Q(r,h)=\rho\times(\text{半径}r\text{、高さ}h\text{の円柱の体積})=\pi r^2 h\rho$$

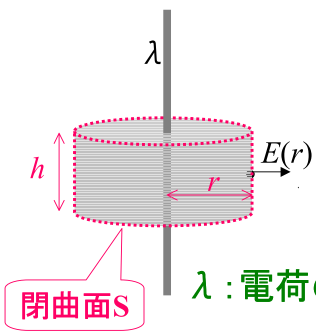
$r>R$ の場合

$$Q(r,h)=\rho\times(\text{半径}R\text{、高さ}h\text{の円柱の体積})=\pi R^2 h\rho$$

左辺＝右辺→電場を求める。

$$\underbrace{\varepsilon_0 2\pi r h E(r)}_{(\text{左辺})}=\underbrace{\begin{cases}\pi r^2 h\rho & (r\le R)\\ \pi R^2 h\rho & (r>R)\end{cases}}_{(\text{右辺})}\longrightarrow E(r)=\begin{cases}\dfrac{\rho r}{2\varepsilon_0} & (r\le R)\\[2mm] \dfrac{\rho R^2}{2\varepsilon_0 r} & (r>R)\end{cases}$$

無限に長い直線上に分布した電荷のつくる電場



λ :電荷の線密度

$$\varepsilon_0\int_{(S)}E_n(\mathbf{r})dS = S\text{内の総電荷}$$

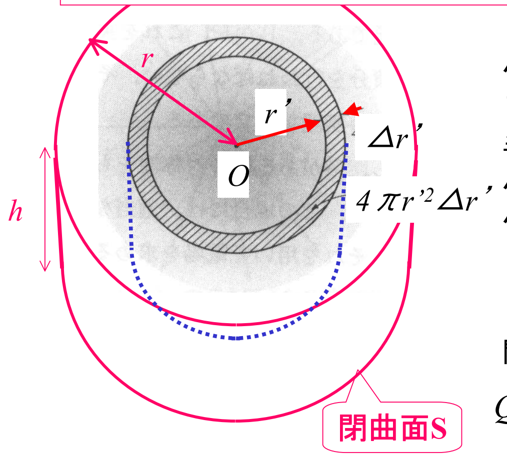
$$(\text{左辺}) = \varepsilon_0 2\pi r h E(r)$$
$$(\text{右辺}) = \lambda h$$

$$\boxed{E(r)=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}}$$

電荷の分布が軸対称であるが、一様ではない場合

→電荷密度 ρ が距離 r の関数　$\rho(r)$

底面の半径 r の円筒S内の総電荷はどのように求めるか？



バームクーヘン状に薄いパイプ（皮）に分ける。

半径r'、厚みΔr'、高さhのパイプ
パイプの電荷密度→ $\rho(r')$
パイプの体積→ $2\pi r' h \Delta r'$
⇒筒内の総電荷
$= \rho(r')\,2\pi r' h \Delta r'$

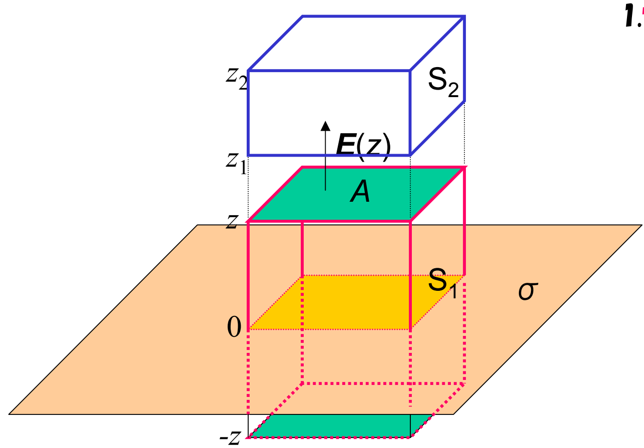
閉曲面内のパイプの電荷を足す。

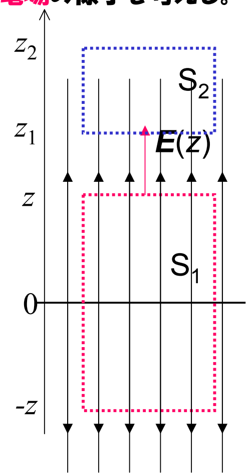
$$Q(r) = \int_0^r 2\pi r' h \rho(r') dr'$$

(c) 平面状電荷

無限に広い平面上に分布した電荷のつくる電場

1.電場の様子を考える。





2. 適当な閉曲面Sをとる。

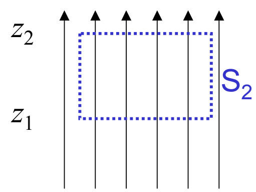
閉曲面S: z 軸を軸とした直方体=上下面(面積 A)+側面

ガウスの法則 $\boxed{\varepsilon_0 \int_{(S)} E_n(\mathbf{r}) dS = S\text{内の総電荷}}$

3. ガウスの法則の左辺、右辺を計算。

電場は xy によらず z 方向: $E_z(z)$

⟶ 側面からの項＝0



閉曲面 S_2: 内部に電荷なし

$$(\text{左辺}) = \varepsilon_0 \times (\text{上面} \times \text{出ていく電場} + \text{下面} \times \text{入ってくる電場})$$
$$= \varepsilon_0 A(E(z_2) - E(z_1))$$
$$(\text{右辺}) = S_2\text{内に電荷無し} = 0$$

$$\longrightarrow E(z_2) = E(z_1)$$

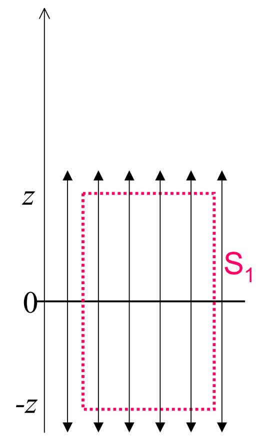
電場は z によらず一定値

閉曲面 S_1: 内部に電荷あり

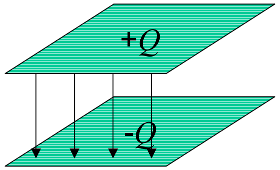
$$(\text{左辺}) = \varepsilon_0 \times (\text{上面} + \text{下面}) \times \text{出ていく電場}$$
$$= \varepsilon_0 2AE(z)$$
$$(\text{右辺}) = S_1\text{内の電荷} = A \times \sigma$$

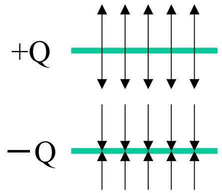
$$\longrightarrow \boxed{E(z) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}}$$

ただし、z>0で上向き、z<0では下向き



問2:下図のような面積がSの平板コンデンサーにQの電荷を蓄えたときの電極間の電場は？





それぞれの電極の作る電場を足し算する。
電荷密度は$\rho = Q/S$

上の電極	上側には上向き$\rho/(2\varepsilon_0) = Q/(2\varepsilon_0 S) = E$	
	下側には下向き	大きさE
下の電極	上側には下向き	大きさE
	下側には上向き	大きさE

よって、二つの電極の外側の領域では電場は打ち消しあいゼロ。間の領域では$2E = Q/(\varepsilon_0 S)$で下向き。