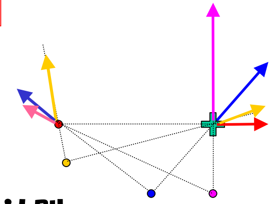
電気力線とガウスの法則



電荷の分布

↓ クーロンの法則

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \sum_{j=1}^{N} \frac{q_j}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_j}{\left|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_j\right|^3}$$

電場

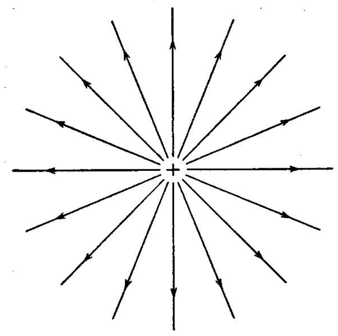
影響

電場自体の従う法則を求めておくと便利

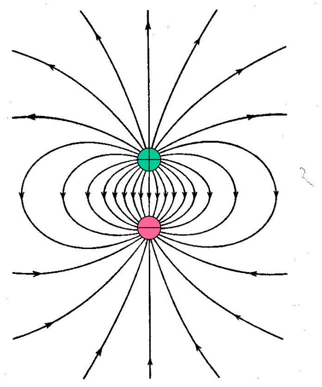
ガウスの法則
(うずなしの法則)

電気力線

電場の様子を一目で分かるように表現する方法



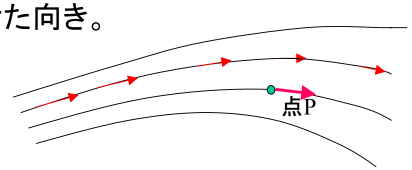
(a) 1 個の点電荷



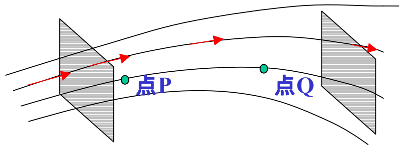
(b) 正負の点電荷の対

電気力線の定義

(A) 電場は電気力線上の各点の接線方向。向きは電気力線につけた向き。

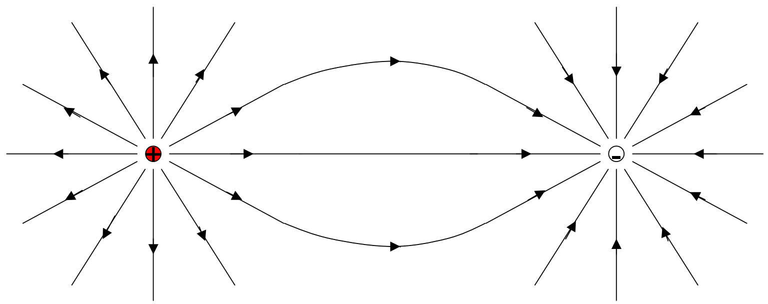


(B) 電場の大きさは、電気力線の方向に垂直な面の面密度に比例。



電気力線の性質

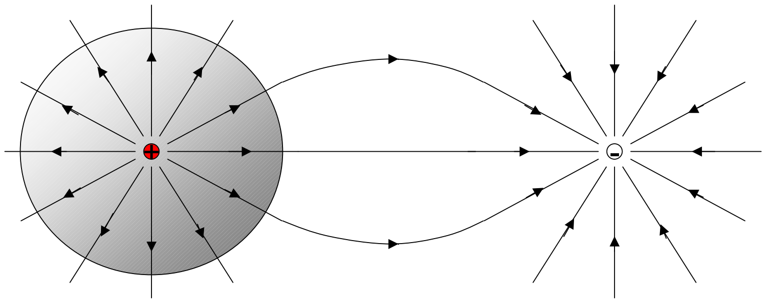
(C) 電気力線は正電荷から出発し、負電荷で終結する。正電荷以外の点から発生したり、負電荷以外の点で消滅することはない。



電気力線の性質

(D) 閉じた面を貫いて外へ出て行く電気力線の総本数は、面の内部にある電荷に比例する。

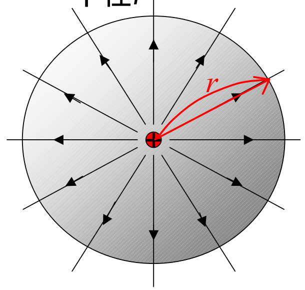
→ **ガウスの法則！**



電気力線の数∝電場の大きさ∝正電荷の大きさ

閉曲面が球面の場合の(D)の証明

半径r



電気力線の密度 $w(\mathbf{r})$

(B)より $w(\mathbf{r}) = \alpha E(\mathbf{r})$

電荷qから距離rの点の電場 $E(\mathbf{r})$

$$E(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = E(r)$$

$$\Rightarrow \quad w(\mathbf{r}) = \alpha E(r) = \frac{\alpha q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

→ qを中心とする球面上ではwは一定

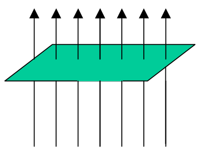
球面上での電気力線の総数 $N = (\text{球面の面積}) \times (\text{電気力線の密度})$

$$= 4\pi r^2 \times \frac{\alpha q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{\alpha q}{\varepsilon_0}$$

電荷から出る電気力線の総数Nは半径によらず一定で、電荷の量qに比例する

ガウスの法則

- 「電気力線」ではなく、電場$\boldsymbol{E}$を用いた表現を考える。
- より一般的な閉曲面を考える。

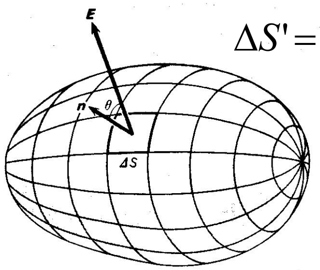


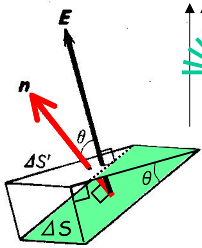
ΔS：曲面上の小面

ΔN：小面ΔSを貫く電気力線の数

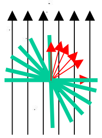
ΔS’：$\boldsymbol{E}$と垂直なΔSの成分（有効な面積）

$$\Delta S' = \Delta S \cos\theta$$

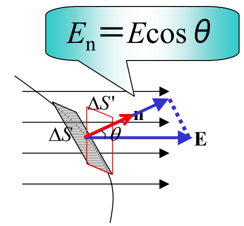




法線ベクトル



ガウスの法則



閉じた面を貫いて外へ出て行く電気力線の総本数

電気力線の密度:$w = \alpha E$

$$\Delta N = w \times \Delta S'$$

$\Delta S'$: 有効面積

$$\Delta N = w\Delta S\cos\theta$$
$$= \alpha E \Delta S\cos\theta$$
$$= \alpha E_n \Delta S$$

$(E_n = E\cos\theta : E\text{の面}\Delta S\text{に垂直な成分})$

小面を貫く電気力線を曲面上で足し合わせる

$$N = \sum \Delta N = \alpha \sum E_n \Delta S \Rightarrow \int_S \alpha E_n dS$$

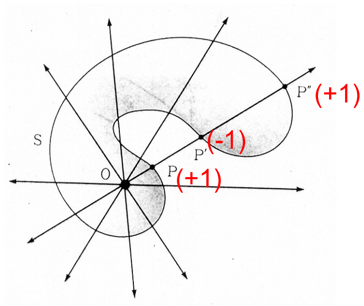
半径rの球面を考えた時には、$N = \dfrac{\alpha q}{\varepsilon_0}$

ガウスの法則

$$N=\int_S \alpha E_n dS=\frac{\alpha q}{\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{\varepsilon_0 \int_S E_n dS = q}$$

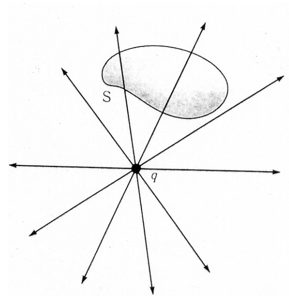
意味:「閉曲面Sを貫く電気力線の数」は
閉曲面内の電荷qに比例する

電気力線の数え方:閉曲面を貫いて外に出る場合は＋
中に入る場合はー



ガウスの法則

閉曲面の内部に電荷が無い場合(q=0)には



$$\varepsilon_0 \int_S E_n dS = 0$$

→閉曲面を貫く電気力線は±０

ベクトルを使うと、面の法線ベクトルを$\boldsymbol{n}$として、

$E_n = E\cos\theta = \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n}$ 電場の法線方向の成分

$$\boxed{\varepsilon_0 \int_S \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n} dS = q}$$

ガウスの法則

閉曲面Sの中にn個の電荷$q_1, q_2, \cdots, q_n$が有る場合
n個の電荷がつくる電場$\boldsymbol{E}$は、各電荷が作る電場
$\boldsymbol{E}_1, \boldsymbol{E}_2, \cdots, \boldsymbol{E}_n$の総和。

$$\varepsilon_0 \int_{(S)} E_n dS = \varepsilon_0 \int_{(S)} \left(\sum_{i=1}^{n} E_{i,n} \right) dS = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_0 \int_{(S)} E_{i,n} dS$$

各電荷について

$$\varepsilon_0 \int_{(S)} E_{i,n} dS = \begin{cases} q_i & (q_i\text{が}S\text{の内にあるとき}) \\ 0 & (q_i\text{が}S\text{の外にあるとき}) \end{cases}$$

$$\longrightarrow \boxed{\varepsilon_0 \int_{(S)} E_n dS = \sum_{i \in S} q_i}$$ (Sの内部についての和)

ガウスの法則

閉曲面Sの中の体積Vに電荷が連続的に
分布している場合

$\rho(\mathbf{r})$:電荷密度

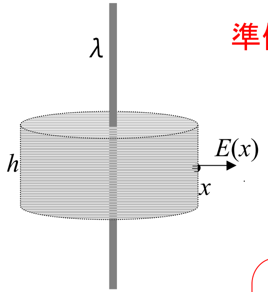
$$\varepsilon_0 \int_S E_n dS = \sum_{i \in S} q_i = \sum_i \rho(\boldsymbol{r}_i) dV_i$$

$$\longrightarrow \boxed{\varepsilon_0 \int_S E_n dS = \int_V \rho(\boldsymbol{r}) dV}$$

面積積分　　体積積分

「閉曲面Sを貫く電気力線の数」　　閉曲面内の電荷q

例題　線密度λの直線電荷が作る電場：ガウスの法則を用いて



準備 1) 半径x、高さhの円筒を閉曲面Sと考える。

2) ガウスの法則の左辺と右辺を考える。

$$\boxed{\varepsilon_0 \int_S E_n dS = \int_V \rho(\mathbf{r}) dV}$$

簡単な計算

3) 左辺：円筒の側面から出てくる電場は
側面に垂直で、どこでも同じ大きさ
上面、下面は垂直成分なし。
→(左辺)= $\varepsilon_0 \times E(x) \times$ 側面の面積

4) 右辺：内部に含まれる電荷は、長さhの量
→(右辺)= $\lambda \times h$

5) (左辺)=(右辺)から、$E(x)$を求める。