今日の重要事項

電場

$\boldsymbol{r}_1$にある点電荷q_1による$\boldsymbol{r}$での電場$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$は、$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=\dfrac{q_1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\mathbf{r}-\boldsymbol{r}_1}{|\mathbf{r}-\boldsymbol{r}_1|^3}$

多数の点電荷q_iがある場合の電場$\mathbf{E}(\mathbf{r})$は、$\mathbf{E}(\mathbf{r})=\sum_{j=1}^{N}\mathbf{E}_j(\mathbf{r})=\sum_{j=1}^{N}\dfrac{q_j}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_j}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_j|^3}$

電荷が空間的に$\rho(\mathbf{r})$で広がっている場合の電場$\mathbf{E}(\mathbf{r})$は、$\mathbf{E}(\mathbf{r})=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\rho(\mathbf{r}')\dfrac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}dV'$

$\mathbf{r}$にある点電荷qが電場$\mathbf{E}(\mathbf{r})$から受ける力は、$\mathbf{F}=q\mathbf{E}(\mathbf{r})$

宿題解答

1) $\mathbf{A}=2\mathbf{i}+\mathbf{j}+2\mathbf{k},\mathbf{B}=4\mathbf{i}+\mathbf{j}+3\mathbf{k}$　のとき

①　$\mathbf{C}=\mathbf{A}\times\mathbf{B}$　を求めよ。

$\mathbf{A}=(2,1,2)$、　$\mathbf{B}=(4,1,3)$より、　$\mathbf{A}\times\mathbf{B}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\2&1&2\\4&1&3\end{vmatrix}=\mathbf{i}(1\times3-2\times1)+\mathbf{j}(2\times4-2\times3)+\mathbf{k}(2\times1-1\times4)=\mathbf{i}+2\mathbf{j}-2\mathbf{k}$

②　$\mathbf{A},\mathbf{B}$　のなす角の余弦（コサイン）を求めよ。

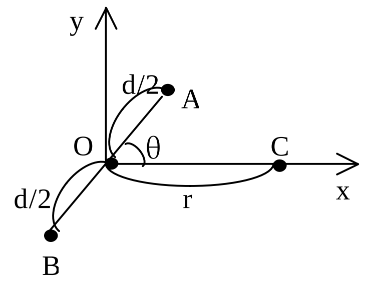
$\mathbf{A},\mathbf{B}$のなす角をθとする。$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=2\times4+1\times1+2\times3=15.|\mathbf{A}|=\sqrt{2^2+1^2+2^2}=3,|\mathbf{B}|=\sqrt{4^2+1^2+3^2}=\sqrt{26}$

$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=|\mathbf{A}||\mathbf{B}|\cos\theta$より$\cos\theta=\dfrac{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}}{|\mathbf{A}||\mathbf{B}|}=\dfrac{15}{3\sqrt{26}}=\dfrac{5}{26}\sqrt{26}$

③　$\mathbf{C}\perp\mathbf{A}$　を示せ。（ヒント：なす角が９０度$\Rightarrow\cos90^\circ=0$）

$\mathbf{C},\mathbf{A}$のなす角をφとする。$\mathbf{C}\cdot\mathbf{A}=1\times2+2\times1+(-2)\times2=0=|\mathbf{C}||\mathbf{A}|\cos\varphi$より､$\cos\varphi=0$となるから、$\varphi=90^\circ$

2) 点A、点Ｂに電荷ｑ、点Ｃに電荷q_1があったとする。　ｘ、ｙ軸を図のようにとるとき、



①　点A、B、Cの座標（点Oを始点とした位置ベクトル）を求めよ。

$A:(\dfrac{d}{2}\cos\theta,\dfrac{d}{2}\sin\theta,0),B:(-\dfrac{d}{2}\cos\theta,-\dfrac{d}{2}\sin\theta,0),C:(r,0,0)$

②　点Cから点AへのベクトルCAを求めよ。

$\overrightarrow{CA}=\mathbf{A}-\mathbf{C}=(\dfrac{d}{2}\cos\theta,\dfrac{d}{2}\sin\theta,0)-(r,0,0)=(\dfrac{d}{2}\cos\theta-r,\dfrac{d}{2}\sin\theta,0)$

③　$|\overrightarrow{CA}|$を求めよ。

$|\overrightarrow{CA}|=\sqrt{(\dfrac{d}{2}\cos\theta-r)^2+(\dfrac{d}{2}\sin\theta)^2}=\sqrt{\dfrac{d^2}{4}\cos^2\theta-dr\cos\theta+r^2+\dfrac{d^2}{4}\sin^2\theta}=\sqrt{\dfrac{d^2}{4}+r^2-dr\cos\theta}$

④　点Ｃの電荷q1が点Aの電荷qに及ぼすクーロン力$\mathbf{F}_{CA}$を求めよ。

$$\mathbf{F}_{CA}=\frac{qq_1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\overrightarrow{CA}}{|\overrightarrow{CA}|^3}=\frac{qq_1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{\left(\sqrt{\dfrac{d^2}{4}+r^2-dr\cos\theta}\right)^3}\cdot\left(\frac{d}{2}\cos\theta-r,\frac{d}{2}\sin\theta,0\right)$$

⑤　$\mathbf{A}\times\mathbf{F}_{CA}$を求めよ。$\mathbf{A}$、$\mathbf{F}_{CA}$ともにｚ成分はゼロなので、$\mathbf{A}=\overrightarrow{OA}=(A_x,A_y,0),\mathbf{F}_{CA}=(F_x,F_y,0)$とおく。

$$\mathbf{A}\times\mathbf{F}_{CA}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\A_x&A_y&0\\F_x&F_y&0\end{vmatrix}=(A_y\times0-0\times F_y)\mathbf{i}+(0\times F_x-A_x\times0)\mathbf{j}+(A_xF_y-A_yF_x)\mathbf{k}=(A_xF_y-A_yF_x)\mathbf{k}$$

$$=\left[\frac{qq_1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\dfrac{d}{2}\sin\theta\cdot\dfrac{d}{2}\cos\theta-\dfrac{d}{2}\sin\theta\cdot\left(\dfrac{d}{2}\cos\theta-r\right)}{\left(\sqrt{\dfrac{d^2}{4}+r^2-dr\cos\theta}\right)^3}\right]\mathbf{k}=\left[\frac{qq_1}{8\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{dr\sin\theta\cdot}{\left(\sqrt{\dfrac{d^2}{4}+r^2-dr\cos\theta}\right)^3}\right]\mathbf{k}$$

⑥　同様にして$\mathbf{B}\times\mathbf{F}_{CB}$を求め、原点Oまわりの力のモーメント$\mathbf{A}\times\mathbf{F}_{CA}+\mathbf{B}\times\mathbf{F}_{CB}$を求めよ。
(解答には直接関係ないが、二つの電荷qは棒でつながれていると想定されている。)

②から⑤と同様にして（途中省略）$\mathbf{B}\times\mathbf{F}_{CB} = \left[-\frac{qq_1}{8\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{dr\sin\theta\cdot}{\left(\sqrt{\frac{d^2}{4}+r^2+dr\cos\theta}\right)^3}\right]\mathbf{k}$

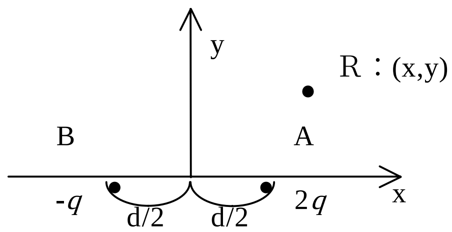
よって力のモーメントは$\mathbf{A}\times\mathbf{F}_{CA}+\mathbf{B}\times\mathbf{F}_{CB} = \left[-\frac{qq_1 dr\sin\theta}{8\pi\varepsilon_0}\cdot\left[\left(\frac{d^2}{4}+r^2-dr\cos\theta\right)^{-\frac{3}{2}} - \left(\frac{d^2}{4}+r^2+dr\cos\theta\right)^{-\frac{3}{2}}\right]\right]\mathbf{k}$

注意：2)の①から④は z 成分を表記していなくても構わない。

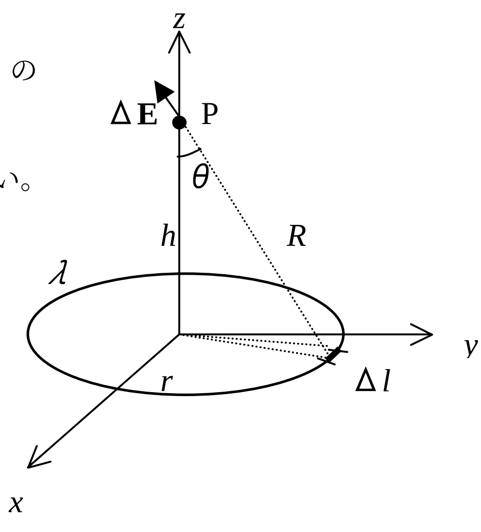
宿題：　A）は基本問題、B)は応用問題。　B)ができなければ、A)だけでも提出すること。

A) 2 個の点電荷 2q、-q が図のように点 A、Ｂにおかれているとき、
以下の値を求めよ。（Z 成分は表示しなくてよい。
1)　点 A、Ｂの座標
2)　点 A から点Ｒ(x,y)へのベクトル $\overrightarrow{AR}$

3)　点電荷 2q が点Ｒ(x,y)につくる電場 $\boldsymbol{E}_A$
4)　電荷-q が点Ｒ(x,y)につくる電場 $\boldsymbol{E}_B$
5)　2q と-q による点Ｒ（x,y）での電場 $\boldsymbol{E}_A+\boldsymbol{E}_B$



B) xy 平面上の中心が原点、半径 r の円周上に、線密度λで一様に
電荷が分布している。このとき、円の中心から h 上方の点 P での電場 **E** の
大きさを求める。
1) 円周上の弧Δl の電荷Δq を求めよ。
2)　Δq が点 P に作る電場Δ**E** の大きさを求めよ。距離は R のままでよい。
3)　Δ**E** の z 成分ΔE_zを求めよ。cos θ=h/R を用いよ。
4)　ΔE_zを円周全体について足し合わせて、点 P での電場 **E** の z 成分
E_zを r と h を用いて表せ。
5) 電場の x,y 成分はどうなっているか？



質問その他は ichida@konan-u.ac.jp まで。
http://www.phys.konan-u.ac.jp/Quantum/ichida/Lectures/Em1/index.html
に講義資料とこのノートが置いてあります。