今日の重要事項

ベクトルとスカラー

$$\mathbf{A}=(A_x,A_y,A_z),\mathbf{B}=(B_x,B_y,B_z)$$
$$|\mathbf{A}|=\sqrt{{A_x}^2+{A_y}^2+{A_z}^2}$$
$$\mathbf{A}+\mathbf{B}=(A_x+B_x,A_y+B_y,A_z+B_z)$$
$$a\mathbf{A}=(aA_x,aA_y,aA_z)$$

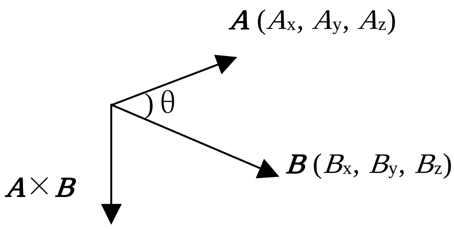
位置ベクトル

$$\mathbf{r}_1=(x_1,y_1,z_1),\mathbf{r}_2=(x_2,y_2,z_2)$$
$$\mathbf{R}_{21}=\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2$$
$$R_{21}=|\mathbf{R}_{21}|=|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}$$
$$\mathbf{n}_{21}=\frac{\mathbf{R}_{11}}{|R_{21}|}$$ 単位ベクトル

クーロンの法則

$$\mathbf{F}_{21}=\frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{{R_{21}}^2}\mathbf{n}_{21}=\frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|^3}$$

ベクトルの数学



・スカラー積（内積）

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\cos\theta=A_XB_X+A_YB_Y+A_ZB_Z$$

・ベクトル積（外積）

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=(A_YB_Z-A_ZB_Y)\boldsymbol{i}+(A_ZB_X-A_XB_Z)\boldsymbol{j}+(A_XB_Y-A_YB_X)\boldsymbol{k}=(A_YB_Z-A_ZB_Y,A_ZB_X-A_XB_Z,A_XB_Y-A_YB_X)$$

大きさは$|\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\sin\theta$、向きは$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$に垂直で$\boldsymbol{A}$から$\boldsymbol{B}$に回転する右ネジの進行方向

・ベクトルの微分演算子（あとで出てくるが、ここでまとめて覚えておいてほしい）

$$\nabla=\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)=\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

ここで $\frac{\partial}{\partial x}$ は、x 以外の変数（y,z）を定数と思って、x のみについて微分する、**偏微分**を示す。

Cf)　$f(x,y,z)=yx^2+zy^2+xz^2$ のとき、$\partial f/\partial x=2xy+z^2$

$\nabla f(x,y,z)$　　ベクトル

$\nabla\cdot\mathbf{A}(x,y,z)$　　スカラー

$\nabla\times\mathbf{A}(x,y,z)$　　ベクトル

☼ 宿題解答

原点（0, 0, 0）に点電荷 q_0 がある。点電荷 q を（x, y, z）においたとき、q_0 が q におよぼすクーロン力 F の大きさを計算せよ。また、点電荷 q_0 が１C、q が 2C、x=３cm、y=４cm、z=0cm のとき、F の大きさを求めよ。注意：MKSA 単位で計算すること。

q_0がqにおよぼすクーロン力は

$$\mathbf{F}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_0 q}{r^2}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_0 q}{x^2+y^2+z^2}$$

$q_0=1\mathrm{C}$、$q=2\mathrm{C}, x=3\mathrm{cm}, y=4\mathrm{cm}, z=0\mathrm{cm}$のときの$|\mathbf{F}|$は、

$$|\mathbf{F}|=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_0 q}{\left(x^2+y^2+z^2\right)}$$にパラメーターを代入して、

$$|\mathbf{F}|=9\times10^{9}\times\frac{1\times2}{\left(0.03^2+0.04^2\right)}=7.2\times10^{12}[\mathrm{N}]$$

☼ 宿題：　１）は基本問題、2)は応用問題。　2)ができなければ、1)だけでも提出すること。

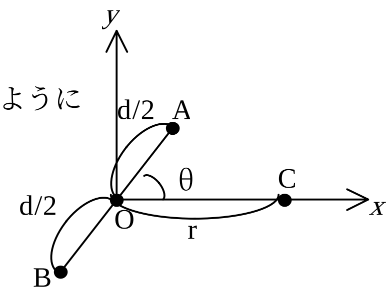
1) $\mathbf{A}=2\mathbf{i}+\mathbf{j}+2\mathbf{k}, \mathbf{B}=4\mathbf{i}+\mathbf{j}+3\mathbf{k}$　のとき

① $\mathbf{C}=\mathbf{A}\times\mathbf{B}$　　を求めよ。

② $\mathbf{A}, \mathbf{B}$　のなす角の余弦（コサイン）を求めよ。

③ $\mathbf{C}\perp\mathbf{A}$　　を示せ。（ヒント：なす角が９０度$\Rightarrow \cos 90^\circ=0$）

2) 点A、点Bに電荷q、点Cに電荷q_1があったとする。x、y軸を図のようにとるとき、



① 　点A、B、Cの座標（点Oを始点とした位置ベクトル）を求めよ。

② 　点Cから点AへのベクトルCAを求めよ。

③ 　$|\mathrm{CA}|$を求めよ。

④ 　点Cの電荷q1が点Aの電荷qに及ぼすクーロン力$\mathbf{F}_{CA}$を求めよ。

⑤ 　$\mathbf{A}\times\mathbf{F}_{CA}$を求めよ。

⑥ 　同様にして$\mathbf{B}\times\mathbf{F}_{CB}$を求め、原点Oまわりの力のモーメント$\mathbf{A}\times\mathbf{F}_{CA}+\mathbf{B}\times\mathbf{F}_{CB}$を求めよ。

☼ 数学の復習 (次回、使います。)

1)　$1+\tan^2\theta=1/\cos^2\theta\equiv\sec^2\theta$　　$\because\quad 1+\dfrac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}=\dfrac{\cos^2\theta+\sin^2\theta}{\cos^2\theta}=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$

2)　$(\tan\theta)'=\dfrac{1}{\cos^2\theta}=\sec^2\theta$

$$\because\ \left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)'=\frac{\cos\theta\cdot(\sin\theta)'-\sin\theta\cdot(\cos\theta)'}{\cos^2\theta}=\frac{\cos^2\theta+\sin^2\theta}{\cos^2\theta}=\frac{1}{\cos^2\theta}$$

参考（分数の微分）　$\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$